Autotest n°3 – Correction

Calcul littéral et équations

Exercice 1 : Revoir Test 2

Exercice 2 : Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

1) $A = x - 4(3x+2)$.
2) $B = (x-4)(3x+2)$.
3) $C = (x+2)(2x-3) - 3(x+1)$.
4) $D = x(-x+4) + (x-3)(x+1)$.
5) $E = 4(2x+5)^2$
6) $F = (2x-1)^2 + (3x-1)(3x+1)$
7) $G = (2x+7)^2 - (2x+7)(5-x)$.
8) $H = (x+2)^2 - (x+1)^2$.

Solution :

$$\begin{aligned} A &= x - 4(3x+2) \\ &= x - 12x - 8 \\ &= -11x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x-4)(3x+2) \\ B &= 3x^2 + 2x - 12x - 8 \\ B &= 3x^2 - 10x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (x+2)(2x-3) - 3(x+1) \\ &= 2x^2 - 3x + 4x - 6 - 3x - 3 \\ &= 2x^2 - 2x - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= x(-x+4) + (x-3)(x+1) \\ &= -x^2 + 4x + x^2 + x - 3x - 3 \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 4(2x+5)^2 \\ &= 4(4x^2 + 20x + 25) \\ &= 16x^2 + 80x + 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (2x-1)^2 + (3x-1)(3x+1) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 + 9x^2 - 1 \\ &= 13x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (2x+7)^2 - (2x+7)(5-x) \\ &= 4x^2 + 28x + 49 - (10x - 2x^2 + 35 - 7x) \\ &= 4x^2 + 28x + 49 - 10x + 2x^2 - 35 + 7x \\ &= 6x^2 + 25x + 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= (x+2)^2 - (x+1)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= x^2 + 4x + 4 - x^2 - 2x - 1 \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Exercice 3 : On pose $A = -3x^2 + 5x - 2$ et $B = x^2 - 8x + 7$.
Montrer que $A = (x-1)(2-3x)$ puis que $B = (x-4)^2 - 9$.

Solution :

$$\begin{aligned} (x-1)(2-3x) &= 2x - 3x^2 - 2 + 3x \\ &= -3x^2 + 5x - 2 \\ &= A \end{aligned}$$

Ainsi on a $A = (x-1)(2-3x)$.

$$\begin{aligned}(x-4)^2 - 9 &= x^2 - 8x + 16 - 9\\ &= x^2 - 8x + 7\\ &= B\end{aligned}$$

Ainsi on a $B = (x-4)^2 - 9$.

Exercice 4 : On pose $A = 2x^2 + 4x - 6$ et $B = x - 1$.
Montrer que $A - B = (2x+5)(x-1)$.

Solution :

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}A - B &= 2x^2 + 4x - 6 - (x-1)\\ &= 2x^2 + 4x - 6 - x + 1\\ &= 2x^2 + 3x - 5\end{aligned}$$

Ainsi on a $A - B = 2x^2 + 3x - 5$.
D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}(2x+5)(x-1) &= 2x^2 - 2x + 5x - 5\\ &= 2x^2 + 3x - 5\end{aligned}$$

Ainsi on a $A - B = (2x+5)(x-1)$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $8x - 5 = -7$
2) $5(2x+1) - 8 = 12$
3) $5x - 2 = 7x + 4$
4) $5(x-3) + 12 = 4x - 1$
5) $(3+2x)(1-x) = -2(x^2+1)$
6) $\dfrac{3x-5}{2} = \dfrac{x+4}{3}$

Solution :

1) On a :

$$\begin{aligned}8x - 5 = -7 \quad &\Leftrightarrow \quad 8x = -7 + 5\\ &\Leftrightarrow \quad 8x = -2\\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{8}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

2) On a :

$$\begin{aligned}5(2x+1) - 8 = 12 \quad &\Leftrightarrow \quad 10x + 5 - 8 = 12\\ &\Leftrightarrow \quad 10x - 3 = 12\\ &\Leftrightarrow \quad 10x = 12 + 3\\ &\Leftrightarrow \quad 10x = 15\\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{15}{10}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

3) On a :

$$\begin{aligned} 5x-2=7x+4 &\Leftrightarrow 5x-7x=4+2 \\ &\Leftrightarrow -2x=6 \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{6}{2} \\ &\Leftrightarrow x=-3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\{-3\}$.

4) On a :

$$\begin{aligned} 5(x-3)+12=4x-1 &\Leftrightarrow 5x-15+12=4x-1 \\ &\Leftrightarrow 5x-4x=15-12-1 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\{2\}$.

5) On a :

$$\begin{aligned} (3+2x)(1-x)=-2(x^2+1) &\Leftrightarrow 3-3x+2x-2x^2=-2x^2-2 \\ &\Leftrightarrow 3-x=-2 \\ &\Leftrightarrow -x=-2-3 \\ &\Leftrightarrow x=5 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\{5\}$.

6) On a :

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{2}=\frac{x+4}{3} &\Leftrightarrow 3(3x-5)=2(x+4) \\ &\Leftrightarrow 9x-15=2x+8 \\ &\Leftrightarrow 9x-2x=8+15 \\ &\Leftrightarrow 7x=23 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{23}{7} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{23}{7}\right\}$.

EXERCICE 6 : On considère la fonction $f(x)=3(x-5)^2-27$.

1) Développer, réduire et ordonner la fonction f.

Solution :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-5)^2-27 \\ &= 3(x^2-10x+25)-27 \\ &= 3x^2-30x+75-27 \\ &= 3x^2-30x+48 \end{aligned}$$

2) Montrer que $f(x)=3(x-8)(x-2)$.

Solution :

$$\begin{aligned} 3(x-8)(x-2) &= (3x-24)(x-2) \\ &= 3x^2-6x-24x+48 \\ &= 3x^2-30x+48 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Il s'agit de la forme factorisée de f.

3) En utilisant la forme la mieux adaptée :

a) Calculer $f(0)$.

Solution : On utilise la forme développée :

$$f(0) = 3\times 0^2 - 30\times 0 + 48 = 48$$

b) Calculer $f(8)$.

Solution : On utilise la forme factorisée :

$$f(8) = (8-8)(8-2) = 3\times 0\times 6 = 0$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3x^2$.

Solution : On utilise la forme développée :

$$\begin{aligned} f(x) = 3x^2 &\Leftrightarrow 3x^2-30x+48 = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow -30x+48 = 0 \\ &\Leftrightarrow 30x = -48 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{48}{30} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{8}{5}\right\}.$$

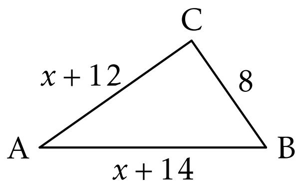
.

Exercice 7 : On considère la figure ci-contre, où x désigne un nombre strictement positif.

1) a) Calculer AB et AC lorsque $x = 4$.

Solution : On trouve :

$$\mathrm{AB} = 4+14 = 18 \qquad \mathrm{AC} = 4+12 = 16$$



b) Lorsque $x = 4$, ABC est-il un triangle rectangle ? Justifier la réponse.

Solution : On remarque que AB est la plus grande longueur du triangle. On calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= 18^2 \\ &= 324 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2 &= 16^2+8^2 \\ &= 320 \end{aligned}$$

On a $\mathrm{AB}^2 \neq \mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2$.

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

2) Le but de cette question est de déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en C.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+14)^2 = (x+12)^2 + 8^2$.

Solution : On résout :

$$\begin{aligned}(x+14)^2 = (x+12)^2+8^2 &\Leftrightarrow x^2+28x+196 = x^2+24x+144+64\\ &\Leftrightarrow 28x+196 = 24x+208\\ &\Leftrightarrow 4x = 12\\ &\Leftrightarrow x = 3\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en C.

Solution : D'après le théorème de Pythagore, et sa réciproque, le triangle ABC est rectangle en C si, et seulement si, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Or :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow (x+14)^2 = (x+12)^2 + 8^2 \Leftrightarrow x = 3$$

Donc $x = 3$ est la seule solution pour que le triangle soit rectangle en C.

Repérage

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé (O;I;J), on donne les 4 points suivants :

$$E(1;0)\,,\,F(5;5)\,,\,G(-2;5)\,,\,H(2;10)$$

.

Déterminer si le quadrilatère EFGH est un parallélogramme. Justifier.

Solution : Soit M le milieu de [EG]:

$$x_M = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{y_E+y_G}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$$

Les coordonnées de M sont donc $\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Soit N le milieu de [FH]:

$$x_N = \frac{x_F+x_H}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} \qquad y_N = \frac{y_F+y_H}{2} = \frac{5+10}{2} = \frac{15}{2}$$

Les coordonnées de N sont donc $\left(\frac{7}{2};\frac{15}{2}\right)$.

Puisque les points M et N n'ont pas les mêmes coordonnées alors EFGH n'est pas un parallélogramme.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé (O;I;J), on donne les points suivants :

$$R(2;4)\,,\,S(4;9)\,,\,\text{et}\;\;T(-3;6)$$

.

Déterminer la nature du triangle RST.

Solution : On calcule le carré des longueurs :

$$\begin{aligned} RS^2 &= (x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2 \\ &= (4-2)^2 + (9-4)^2 \\ &= 2^2 + 5^2 \\ &= 4 + 25 \\ &= 29 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} RT^2 &= (x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2 \\ &= (-3-2)^2 + (6-4)^2 \\ &= (-5)^2 + 2^2 \\ &= 25 + 4 \\ &= 29 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ST^2 &= (x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2 \\ &= (-3-4)^2 + (6-9)^2 \\ &= (-7)^2 + (-3)^2 \\ &= 49 + 9 \\ &= 58 \end{aligned}$$

On remarque que $RS = RT$ et que $ST^2 = RS^2 + RT^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est isocèle et rectangle en R.

Exercice 3 : Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, on donne les points suivants :

$$Q(3;-5)\,,\ R(-3;-3)\,,\ S(2;-8) \text{ et } T(-4;-6)$$

.
Démontrer que QSTR est un rectangle.
Solution :
Soit M le milieu de [QT]:

$$x_M = \frac{x_Q + x_T}{2} = \frac{3 + (-4)}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{-5 + (-6)}{2} = -\frac{11}{2}$$

Les coordonnées de M sont donc $\left(-\frac{1}{2};-\frac{11}{2}\right)$.
Soit N le milieu de [RS]:

$$x_N = \frac{x_R + x_S}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_N = \frac{y_R + y_S}{2} = \frac{-3 + (-8)}{2} = -\frac{11}{2}$$

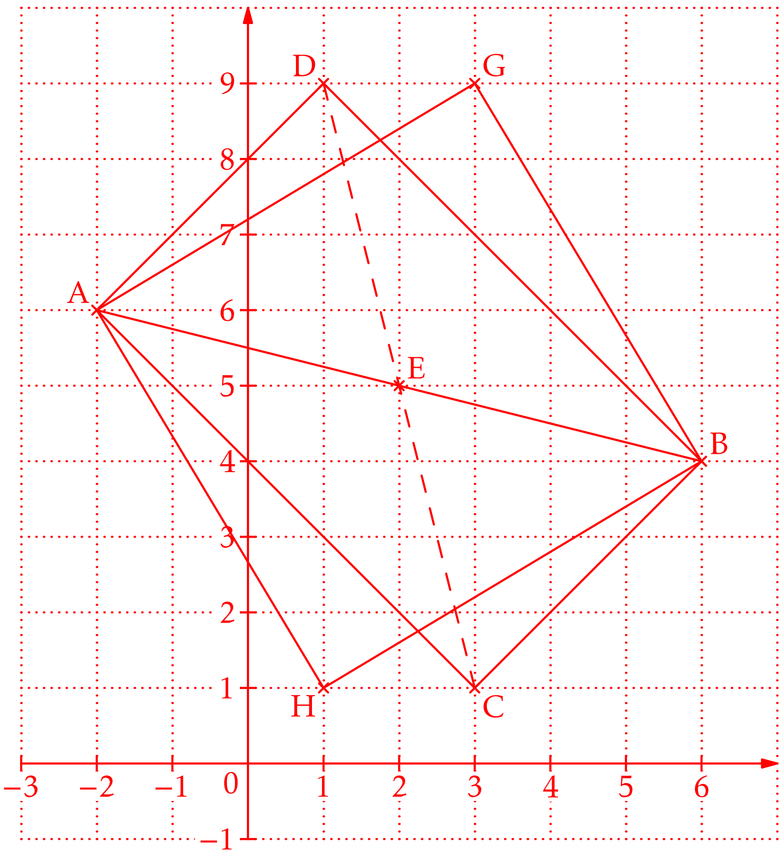
Les coordonnées de N sont donc $\left(-\frac{1}{2};-\frac{11}{2}\right)$.
Puisque les points M et N ont les mêmes coordonnées alors QSTR est un parallélogramme.
On calcule les longueurs QT et RS :

$$QT = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-3)^2 + (-6-(-5))^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$RS = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-8-(-3))^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Puisque $QT = RS$, le parallélogramme QSTR est un rectangle.

Exercice 4 :
On considère un repère orthonormé $(O;I;J)$ et les points $A(-2;6)$, $B(6;4)$, $C(3;1)$ et $E(2;5)$.
1) Placer les points dans un repère orthonormé, qu'on complètera tout au long de l'exercice.

Solution :



2) Démontrer que E est le milieu de [AB].
Solution : On calcule les coordonnées $(x;y)$ du milieu de [AB].

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Les coordonnées du milieu de [AB] sont bien celles de E, qui est donc le milieu de [AB].

3) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
Solution : On calcule le carré des longueurs :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (6-(-2))^2 + (4-6)^2 \\ &= 8^2 + (-2)^2 \\ &= 64+4 \\ &= 68 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \\ &= (3-(-2))^2 + (1-6)^2 \\ &= 5^2 + (-5)^2 \\ &= 25+25 \\ &= 50 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= (3-6)^2 + (1-4)^2 \\ &= (-3)^2 + (-3)^2 \\ &= 9+9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

On remarque que $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

4) a) Calculer les coordonnées du point D, symétrique de C par rapport à E.

Solution : Le point E est le milieu de [CD]. On a donc :

$$\begin{aligned} & x_E = \frac{x_C + x_D}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2 = \frac{3 + x_D}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 4 = 3 + x_D \\ \Leftrightarrow\ & 1 = x_D \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y_E = \frac{y_C + y_D}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 5 = \frac{1 + y_D}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 10 = 1 + y_D \\ \Leftrightarrow\ & 9 = y_D \end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont donc $(1;9)$.

b) Quelle est la nature de ACBD ? Justifier.
Solution : Puisque E est le milieu de [AB] et de [CD], le quadrilatère ACBD est un parallélogramme.
De plus, ce quadrilatère a un angle droit, en C. C'est donc un rectangle.

5) Soient $H(1;1)$ et $G(3;9)$. On admet que E est le milieu de [HG].

a) Démontrer que $HG = AB$.
Solution : On sait que $AB = \sqrt{68}$. On calcule HG.

$$\begin{aligned} HG &= \sqrt{(x_G - x_H)^2 + (y_G - y_H)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (9-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{4 + 64} \\ &= \sqrt{68} \end{aligned}$$

Donc $HG = AB$.

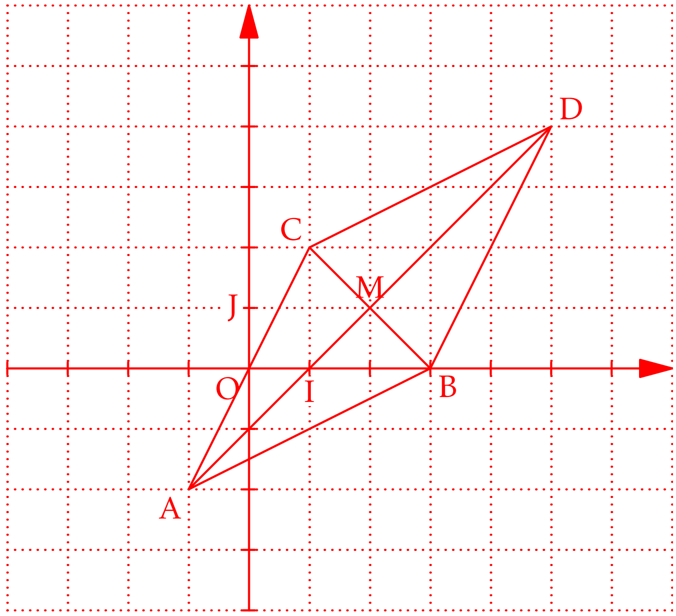
b) On admet que $AH = HB$. Démontrer que AHBG est un carré.
Solution : Le point E est le milieu des diagonales de AHBG. C'est donc un parallélogramme.
De plus, il a ses diagonales de même longueur. C'est donc un rectangle.
Enfin, il a deux côtés consécutifs de même longueur. C'est donc un carré.

Exercice 5 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. On considère les points $A(-1;-2)$, $B(3;0)$ et $C(1;2)$.

1) Faire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.
2) Démontrer que ABC est isocèle en A.
3) Calculer les coordonnées du point D tel que ABDC est un parallélogramme.
4) En utilisant les questions précédentes, que peut-on dire sur la nature de ABDC ? Justifier.

Solution :

1) On obtient :



2) On calcule les longueurs AB et AC :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(3-(-1))^2+(0-(-2))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(1-(-1))^2+(2-(-2))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

Puisque AB = AC, le triangle ABC est isocèle en A.

3) Les diagonales de ABDC se coupent en leur milieu. Donc :

$$\begin{aligned} & \frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{D}}{2} = \frac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -1+x_\mathrm{D} = 3+1 \\ \Leftrightarrow\ & x_\mathrm{D} = 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{D}}{2} = \frac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -2+y_\mathrm{D} = 0+2 \\ \Leftrightarrow\ & y_\mathrm{D} = 4 \end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont donc $(5;4)$.

4) Puisque ABDC est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux, c'est un losange.

Exercice 6 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\mathrm{I};\mathrm{J})$. On considère les points $\mathrm{A}(-1;4)$, $\mathrm{B}(9;-1)$, $\mathrm{C}(13;2)$ et $\mathrm{D}(3;7)$. On note M le milieu de [AC].

1) a) Calculer les coordonnées de M.

Solution : On calcule :

$$x_\mathrm{M} = \frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{C}}{2} = \frac{-1+13}{2} = 6 \qquad y_\mathrm{M} = \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{C}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

Les coordonnées de M sont donc $(6;3)$.

b) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution : On calcule les coordonnées $(x;y)$ du milieu de [BD] :

$$x = \frac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{D}}{2} = \frac{9+3}{2} = 6 \qquad y = \frac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{D}}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Les diagonales de ABCD ont le même milieu. C'est donc un parallélogramme.

2) Démontrer que le triangle MBC est rectangle.
Solution : On calcule MB^2, MC^2 et BC^2.

$$MB^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 = (9-6)^2 + (-1-3)^2 = 9 + 16 = 25$$
$$MC^2 = (x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2 = (13-6)^2 + (2-3)^2 = 49 + 1 = 50$$
$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (13-9)^2 + (2+1)^2 = 16 + 9 = 25$$

On remarque que $MB^2 + BC^2 = MC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MBC est rectangle en B.

3) Soit E(1;3).

a) On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre M et de rayon MB. Démontrer que E est sur $\mathscr{C}$.
Solution : Pour être sur le cercle $\mathscr{C}$, il faut avoir ME = MB.
Or $MB = \sqrt{25} = 5$.
On calcule :

$$ME = \sqrt{(x_E - x_M)^2 + (y_E - y_M)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Le point E est donc sur $\mathscr{C}$.

b) On admet que le point F(11;3) est le symétrique de E par rapport à M. Démontrer que EBFD est un rectangle.
Solution : Le point M est le milieu des segments [BD] et [EF].
De plus, [MB] et [ME] sont des rayons de $\mathscr{C}$. Les segments [BD] et [EF] sont donc des diamètres de $\mathscr{C}$.
Le quadrilatère ABFD a donc des diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu. C'est donc un rectangle.