Autotest n°7 – Correction

Sens de variation

Exercice 1 : On donne le tableau de variations d'une fonction f. Vous répondrez aux questions suivantes par lecture du tableau.

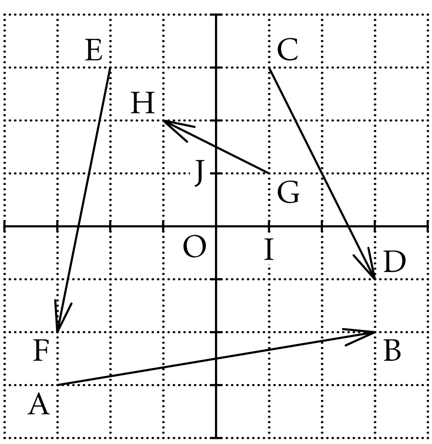
x	-6	-3	-1	1	3	6
$f(x)$	3	-1	4	3	4	-2

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
   Solution : $\mathscr{D}_f = [-6;6]$
2) a) Quelle est l'image de 3 par f ?
   Solution : L'image de 3 par f est 4.
   b) Quel est le nombre d'antécédents de 3 par f ?
   Solution : Le nombre 3 a 4 antécédents par f.
3) Déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [3;6]$.
   Solution : Si $x \in [3;6]$, alors $f(x) \in [-2;4]$.
4) Comparer les nombres suivants lorsque cela est possible. Justifier vos réponses.
   a) $f(-5)$ et $f(-4)$ b) $f(-5)$ et $f(2)$
   Solution :
   a) La fonction f est décroissante sur $[-6;-3]$. Donc $f(-5) > f(-4)$.
   b) On remarque que $f(-5) < 3$ et $f(2) > 3$. Donc $f(-5) < f(2)$.
5) Quel est le maximum de f ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
   Solution : Le maximum de f est 4 et il est atteint en $x = -1$ et en $x = 3$.

Exercice 2 : Refaire quelques exercices du livre

Vecteurs et coordonnées

Exercice 3 :



Dans le repère orthonormé $(O;I,J)$, lire et compléter les coordonnées des vecteurs ci-dessous.

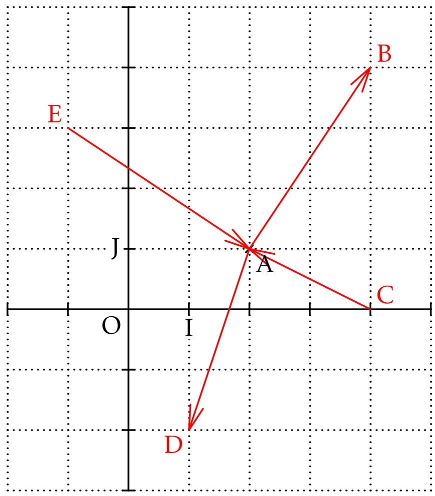
1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$

4) $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Exercice 4 : Placer les points B, C, D et E tels que :



1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

4) $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 5 : On considère des vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ et les points $A(3;1)$, $B(2;5)$ et $C(1;6)$ dans un repère du plan.

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ et $2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{w}$.

Solution : On a :

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\begin{pmatrix}3+(-1)\\1+2\end{pmatrix} \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$
$$(3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\begin{pmatrix}3\times3-(-1)\\3\times1-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow (3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}$$
$$(2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{w})\begin{pmatrix}2\times3+4\times(-4)\\2\times1+4\times(-2)\end{pmatrix} \Leftrightarrow (2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{w})\begin{pmatrix}6-16\\2-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow (2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{w})\begin{pmatrix}-10\\-6\end{pmatrix}$$

Commentaire : La notation $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ veut dire “le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$”. On met donc des “$\Leftrightarrow$” et pas des “$=$” parce que ce ne sont pas des objets égaux, mais des expressions équivalentes.

2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $-2\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{CB}$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
(-2\,\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} -2(x_C - x_B) \\ -2(y_C - y_B) \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (-2\,\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} -2(1-2) \\ -2(6-5) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow (-2\,\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} -2\times(-1) \\ -2\times 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow (-2\,\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
(2\,\overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{CB})\begin{pmatrix} 2(x_C - x_A) - 3(x_B - x_C) \\ 2(y_C - y_A) - 3(y_B - y_C) \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (2\,\overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{CB})\begin{pmatrix} 2(1-3)-3(2-1) \\ 2(6-1)-3(5-6) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow (2\,\overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{CB})\begin{pmatrix} 2\times(-2)-3\times 1 \\ 2\times 5 - 3\times(-1) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow (2\,\overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{CB})\begin{pmatrix} -4-3 \\ 10-(-3) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow (2\,\overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{CB})\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

EXERCICE 6 :

1) Pour chacune des questions, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}$

Solution :

a) On calcule le déteriminant :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 3\times 4 - (-2)\times(-6) = 12 - 12 = 0$$

Les deux vecteurs sont donc colinéaires.

b) On calcule le déteriminant :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 8\times 16 - 5\times 10 = 128 - 50 = 78$$

Les deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

2) On considère les points A(2;5), B(6;8), C(−4;1) et D(5;8).

Est ce que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires? Justifier.

Solution : On calcule les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5-(-4) \\ 8-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On calcule le determinant :

$$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 4\times 7 - 3\times 9 = 28 - 27 = 1$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

EXERCICE 7 : On considère les points A(1;1), B(5;3) et C(2;4) dans un repère orthonormé.

1) Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
Solution : On note $(x;y)$ les coordonnées de D. On a donc :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On résout les deux équations :

$$x-2=4 \iff x=6 \qquad\qquad y-4=2 \iff y=6$$

On a donc D$(6;6)$.

2) Quelle est la nature de ABDC ?
Solution : On a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. On en déduit que ABDC est un parallélogramme.
Commentaire : On pourrait essayer de vérifier si ce n'est pas non plus un rectangle ou un losange, mais un petit dessin permet de se convaincre que ce n'est pas le cas. Ce n'est donc pas la peine de faire des calculs inutiles.

3) Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
Solution : On note $(x;y)$ les coordonnées de E. On a donc :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2)+(5-2) \\ (1-4)+(3-4) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On résout les deux équations :

$$x-2=2 \iff x=4 \qquad\qquad y-4=-4 \iff y=0$$

On a donc E$(4;0)$.

4) Démontrer que B est le milieu de [DE].
Solution : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 6-5 \\ 6-3 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BD}$. Le point B est donc le milieu de [DE].
Commentaire : On peut aussi calculer les coordonnées du milieu de [DE] et vérifier que ce sont celles de E.

5) Démontrer que AEBC est un carré.
Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$. Donc AEBC est un parallélogramme. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$:

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On calcule les longueurs des côtés :

$$\text{AE} = \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \qquad\qquad \text{EB} = \|\overrightarrow{EB}\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

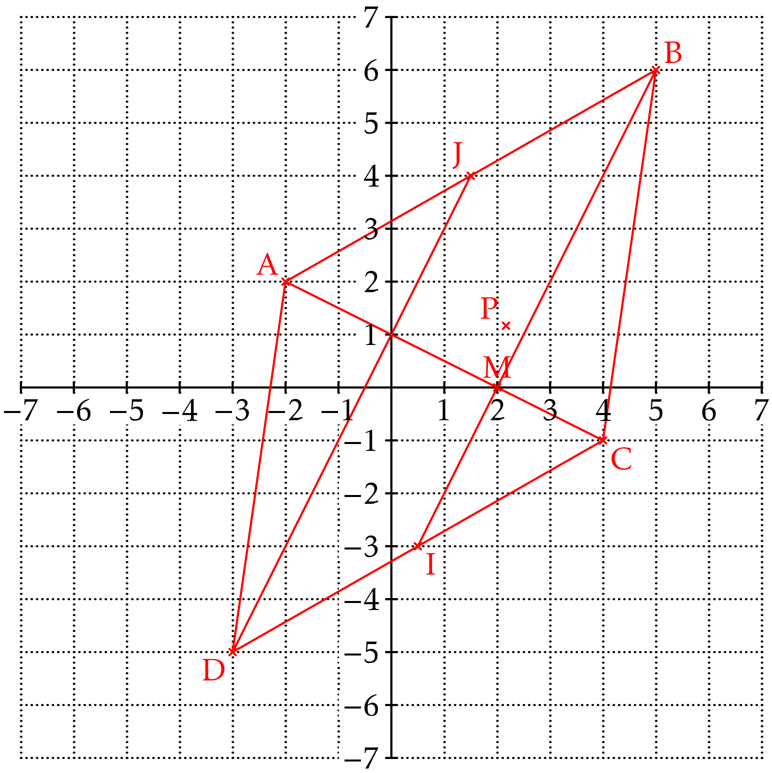
Les deux côtés consécutifs sont égaux. C'est donc un losange.
On calcule la longueur de [AB] :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

On remarque que $AB^2 = AE^2 + EB^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, AEB est rectangle en E.
AEBC est un rectangle, et donc un carré.

Exercice 8 : On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points A(−2; 2), B(5; 6) et C(4; −1).

1) Faire une figure.
Solution :



2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Solution : On a:

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Solution : On a :

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow x_C - x_M = \frac{1}{3} \times 6 \text{ et } y_C - y_M = \frac{1}{3} \times (-3)$$

On résout les deux équations :

$$\begin{aligned} & x_C - x_M = \frac{1}{3} \times 6 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - x_M = 2 \\ \Leftrightarrow\ & -x_M = 2 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & -x_M = -2 \\ \Leftrightarrow\ & x_M = 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y_C - y_M = \frac{1}{3} \times (-3) \\ \Leftrightarrow\ & -1 - y_M = -1 \\ \Leftrightarrow\ & -y_M = -1 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & -y_M = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y_M = 0 \end{aligned}$$

Finalement les coordonnées de M sont $(2;0)$.

4) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Solution : Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. On a donc l'égalité sur les coordonnées :

$$\begin{aligned} & x_D - x_C = x_A - x_B \\ \Leftrightarrow\ & x_D - 4 = -2 - 5 \\ \Leftrightarrow\ & x_D - 4 = -7 \\ \Leftrightarrow\ & x_D = -7 + 4 \\ \Leftrightarrow\ & x_D = -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y_D - y_C = y_A - y_B \\ \Leftrightarrow\ & y_D - (-1) = 2 - 6 \\ \Leftrightarrow\ & y_D + 1 = -4 \\ \Leftrightarrow\ & y_D = -4 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & y_D = -5 \end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont donc $(-3;-5)$:

5) a) Déterminer les coordonnées du point I, milieu de [CD].

Solution : On a :

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_C + x_D}{2} \\ x_I &= \frac{4 - 3}{2} \\ x_I &= \frac{1}{2} \\ x_I &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_I &= \frac{y_C + y_D}{2} \\ y_I &= \frac{-1 - 5}{2} \\ y_I &= \frac{-6}{2} \\ y_I &= -3 \end{aligned}$$

Les coordonnées de I sont $\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

b) Démontrer que les points I, M et B sont alignés.

Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IM}$. On a :

$$\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} x_B - x_I \\ y_B - y_I \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{2} \\ 6 + 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} \\ 0 + 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{IB} = 3\,\overrightarrow{IM}$. Les deux vecteurs sont colinéaires et les points I, M et B sont alignés.

6) Les coordonnées du point J, milieu de [AB] sont $\left(\frac{3}{2};4\right)$. Démontrer que les droites (DJ) et (BI) sont parallèles.

Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{DJ}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{J}} - x_{\mathrm{D}} \\ y_{\mathrm{J}} - y_{\mathrm{D}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{DJ}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - (-3) \\ 4 - (-5) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{DJ}}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ sont égaux, donc colinéaires. Les droites (DJ) et (BI) sont parallèles.