Lycée Les 3 Sources — **Bourg-Lès-Valence**

Mathématiques 2$^{\text{de}}$ — Année **2025-26**

Autotest n°9 – Correction

Probabilités

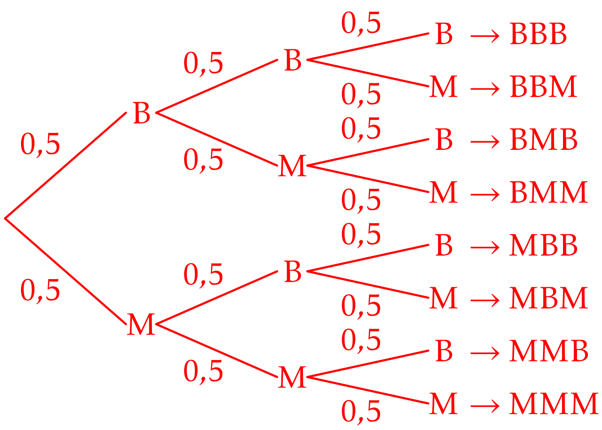
Exercice 1 : Revoir fiche **Probabilités et tableaux**.

Exercice 2 : Revoir fiche **Arbres de probabilités pondérés**.

Exercice 3 : Lors d'un concours, Bruno doit répondre à trois questions de type « vrai ou faux ». Ne connaissant aucune réponse, il décide de répondre au hasard.

1) À l'aide d'un arbre, décrire la situation en utilisant les notations suivantes :
   - B : « Bruno choisit la bonne réponse »
   - M : « Bruno choisit la mauvaise réponse »

   Solution : Il y a 8 issues possibles et équiprobables.
   On a $\Omega = \{BBB, BBM, BMB, MBB, BMM, MBM, MMB, MMM\}$.
   Chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{8}$.



2) Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a) E_1 : « Bruno n'a aucune bonne réponse »

   Solution : On a $E_1 = \{MMM\}$. D'où $P(E_1) = \frac{1}{8}$.

   b) E_2 : « Bruno a exactement deux bonnes réponses »

   Solution : On a $E_1 = \{BBM, BMB, MBB\}$. D'où $P(E_2) = \frac{3}{8}$.

   c) E_3 : « Bruno a au moins une bonne réponse »

   Solution : On a $E_1 = \{BBB, BBM, BMB, MBB, BMM, MBM, MMB\}$. D'où $P(E_3) = \frac{7}{8}$.

Exercice 4 : On lance un dé truqué. La loi de probabilité du numéro sorti est donnée par :

Numéro sorti	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,20	0,05	0,25	0,25	0,05	0,20

On considère les événements suivants :
A : « le numéro sorti est pair » et B : « le numéro sorti est inférieur ou égal à 4 »

1) Calculer la probabilité que le numéro 5 sorte et compléter le tableau.

   Solution : On calcule la somme des autres probabilités :

$$0,20 + 0,05 + 0,25 + 0,25 + 0,20 = 0,95$$

La probabilité d'obtenir 5 est donc de $1-0{,}95=0{,}05$.

2) Quelles sont les issues qui réalisent :

a) l'évènement A b) l'évènement B c) l'évènement $A \cap B$

Solution :

a) $A=\{2;4;6\}$ b) $B=\{1;2;3;4\}$ c) $A\cap B=\{2;4\}$

3) Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A\cap B)$

Solution :

a) $P(A)=0{,}05+0{,}25+0{,}20=0{,}5$

b) $P(B)=0{,}20+0{,}05+0{,}25+0{,}25=0{,}75$

c) $P(A\cap B)=0{,}05+0{,}25=0{,}3$

4) a) Définir par une phrase l'évènement $A\cup B$.

Solution : Cela correspond au fait d'obtenir un nombre paire ou inférieur à 4.

b) Calculer $P(A\cup B)$.

Solution : Puisque $A\cup B=\{1;2;3;4;6\}$, d'après la première questions, $P(A\cup B)=0{,}95$.

5) a) Définir par une phrase l'évènement $\overline{A}$.

Solution : Cela correspond au fait de ne pas obtenir un nombre pair. C'est-à-dire, obtenir un nombre impair.

b) Calculer de deux façons différentes $P(\overline{A})$.

Solution : On a $\overline{A}=\{1;3;5\}$, d'où $P(\overline{A})=020+0{,}25+0{,}05=0{,}5$.

On peut aussi faire $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}5=0{,}5$.

Exercice 5 : On considère une urne contenant 5 jetons rouges et 3 jetons verts indiscernables au touché. Les jetons rouges sont numérotés de 1 à 5 et les verts de 6 à 8.
Les trois parties sont indépendantes.

Partie A :

On ne regarde que les numéros inscrits sur les jetons. On tire un seul jeton. On considère les évènements suivants :

- A : « tirer un jeton avec un nombre pair ».
- B : « tirer un jeton avec un nombre supérieur ou égal à 6 ».

1) Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

Solution : On a :

$$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad P(B)=\frac{3}{8}$$

2) Décrire par une phrase $\overline{B}$ et déterminer $P(\overline{B})$.

Solution : L'évènement $\overline{B}$ correspond à « tirer un jeton avec un nombre strictement inférieur à 6 ». Donc :

$$P(\overline{B})=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

3) Décrire par une phrase $A\cap B$ et déterminer $P(A\cap B)$.

Solution : L'évènement $A\cap B$ correspond à « tirer un jeton avec un nombre pair et supérieur ou égal à 6 ».

Donc $A\cap B=\{6;8\}$. D'où :

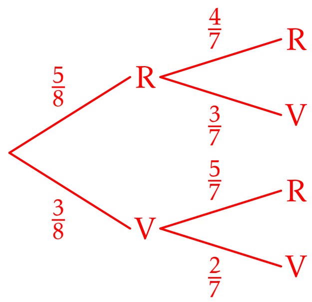
$$P(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

4) Décrire par une phrase $A \cup B$ et déterminer $P(A \cup B)$.
Solution : L'évènement $A \cup B$ correspond à « tirer un jeton avec un nombre pair ou supérieur ou égal à 6 ».
Donc $A \cup B = \{2;4;6;7;8\}$. D'où :

$$P(A \cup B) = \frac{5}{8}$$

Partie B :
On ne regarde que les couleurs. On tire 2 jetons successivement, sans remise.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
Solution : On obtient :



2) Déterminer la probabilité de tirer 2 jetons verts.
Solution : La probabilité est de :

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

3) Déterminer la probabilité de tirer un jeton rouge et un jeton vert, pas forcément dans cet ordre.
Solution : On additionne la probabilité d'avoir un jeton rouge puis un vert et la probabilité d'avoir un jeton vert puis un rouge :

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

Partie C :
On regarde la couleur et le nombre sur les jetons. On tire 2 jetons successivement, sans remise.
Quelle est la probabilité d'avoir un jeton vert et un jeton avec un nombre pair ? Attention, tirer le jeton vert numéroté 6 ne suffit pas. Il faut également que l'autre jeton soit soit vert, soit numéroté avec un nombre pair.
Solution : On note R1, R2, ..., R5 les jetons rouges et V6, V7 et V8 les jetons verts. On énumère les combinaisons valides :

- Un jeton rouge pair puis un jeton vert :

$$\{(R2;V6);(R2;V7);(R2;V8);(R4;V6);(R4;V7);(R4;V8)\}$$

- Un jeton vert puis un jeton rouge pair :

$$\{(V6;R2);(V7;R2);(V8;R2);(V6;R4);(V7;R4);(V8;R4)\}$$

- Deux jetons verts (donc forcément au moins un de pair) :

$$\{(V6;V7);(V6;V8);(V7;V8);(V8;V7);(V8;V6);(V7;V6)\}$$

Il y a donc 18 combinaisons valides, sur les 56 possibles.
La probabilité est donc de $\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.

Signes d'une fonction et inéquations

EXERCICE 6 : Exercice résolu 1 et exercice 1 page 248.

EXERCICE 7 : Exercice 19 page 252.

EXERCICE 8 : Exercice résolu 2 et exercice 3 page 249.

EXERCICE 9 : Exercice 23 page 253.

EXERCICE 10 : Exercice résolu 3 et exercice 5 page 250.

EXERCICE 11 : Exercices 36 et 42 page 254.

EXERCICE 12 : Exercice résolu 4 et exercice 10 page 251.

EXERCICE 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 8x - 16$$

1) Calculer $f\left(\frac{4}{3}\right)$ en détaillant les calculs.
   Solution :

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 16 = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} - 16 = 16 - 16 = 0$$

2) Montrer que pour tout réel x,

$$f(x) = (3x-4)(x+4)$$

   Solution :

$$\begin{aligned}(3x-4)(x+4) &= 3x^2 + 12x - 4x - 16 \\ &= 3x^2 + 8x - 16 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

3) Dresser le tableau de signes de f.
   Solution : On résout $3x - 4 \geq 0$ et $x + 4 \geq 0$.

$$3x - 4 \geq 0 \iff 3x \geq 4 \iff x \geq \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$$

   On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) En déduire les solution de l'inéquation $f(x) > 0$.
Solution : D'après le tableau de signes on a :
$\mathcal{S} =]-\infty;-4[\cup \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

EXERCICE 14 :
Un apiculteur vend des cartons de pots de miel.
Le coût, en euros, de production de x cartons, $x \leq 120$, est modélisé par le nombre $C(x)$, où C est la fonction définie sur $[0\,;120]$ par $C(x) = 0{,}25x^2 + 500$.

1) Calculer le coût de fabrication de 40 cartons.
Solution :
$$C(40) = 0{,}25 \times 40^2 + 500 = 400 + 500 = 900$$
Le coût de fabrication de 40 cartons est de 900 €.

2) On considère le bénéfice, en euros, réalisé après la production et la vente de x cartons. On admet qu'il est modélisé par le nombre $B(x)$, où B est la fonction définie sur $[0;120]$ par :
$$B(x) = -0{,}25x^2 + 30x - 500.$$
Montrer que pour tout x appartenant à $[0\,;120]$, $B(x) = -0{,}25(x-20)(x-100)$.
Solution :
$$\begin{aligned}-0{,}25(x-20)(x-100) &= -0{,}25(x^2 - 100x - 20x + 2000)\\ &= -0{,}25(x^2 - 120x + 2000)\\ &= -0{,}25x^2 + 30x - 500\end{aligned}$$

3) Déterminer le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;120]$.
Solution : On résout $x - 20 \geq 0$ et $x - 100 \geq 0$.
$$x - 20 \geq 0 \iff x \geq 20 \qquad \text{et} \qquad x - 100 \geq 0 \iff x \geq 100$$
On fait un tableau de signes :

x	0		20		100		120
$-0{,}25$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-20$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-100$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) Combien de cartons doit produire et vendre l'apiculteur pour réaliser un bénéfice?
Solution :
D'après le tableau de signes, il doit produire et vendre entre 20 et 100 cartons.