Devoir surveillé n°2 – Correction

Calculatrice autorisée

Nom :
Prénom :

Exercice 1 : (4pt) Lors d'une fête, on veut préparer des **pochettes cadeaux** contenant **120 bonbons** et **180 petits jouets**, de façon à ce que chaque pochette ait le **même nombre de bonbons** et le **même nombre de jouets**, sans qu'il en reste.

1) a) Déterminer le **plus grand nombre de pochettes** que l'on peut préparer.

Solution : Pour déterminer le plus grand nombre de pochettes, on cherche le **plus grand diviseur commun** de 120 et 180.

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$$

Donc, le **plus grand diviseur commun** de 120 et 180 est **60**.
le **plus grand nombre de pochettes** est **60**.

b) Combien de bonbons et de jouets y aura-t-il dans chaque pochette ?

Solution :

$$\text{Bonbons par pochette} = \frac{120}{60} = 2$$
$$\text{Jouets par pochette} = \frac{180}{60} = 3$$

Chaque pochette contiendra donc 2 **bonbons et 3 jouets**.

2) On ajoute maintenant **30 stickers** au stock. Peut-on encore répartir les trois types d'objets (bonbons, jouets, stickers) en pochettes identiques sans reste ? Justifie votre réponse.

Solution : On ajoute 30 stickers. Pour pouvoir faire des sachets identiques sans reste pour les trois objets, il faut que 120, 180 et 30 aient un diviseur commun supérieur à 1.
Le plus grand diviseur commun est 30.
Donc on peut faire **30 pochettes identiques**, chacune contenant :

$$\frac{120}{30} = 4 \text{ bonbons}, \quad \frac{180}{30} = 6 \text{ jouets}, \quad \frac{30}{30} = 1 \text{ sticker}$$

Oui, il est donc possible de répartir les trois types d'objets en pochettes identiques.

Exercice 2 : (3pt) On considère un triangle ABC dont les côtés mesurent :

$$AB = 13\sqrt{7}, \quad CB = 12\sqrt{7} \text{ et } AC = \sqrt{175}$$

.
Quelle est la nature de ce triangle ? justifier.

Solution :

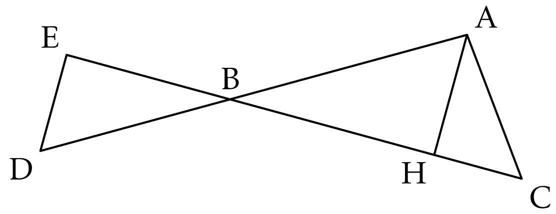
$$AB^2 = (13\sqrt{7})^2 = 169 \times 7 = 1183 \qquad AC^2 = (\sqrt{175})^2 = 175 \qquad CB^2 = (12\sqrt{7})^2 = 144 \times 7 = 1008$$

Ainsi

$$AB^2 = 1183 \qquad AC^2 + CB^2 = 175 + 1008 = 1183$$

Puisque $AC^2 + CB^2 = AB^2$ alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Exercice 3 : (7,5pt) On considère la figure ci-contre. On sait que $BC = 80\,\text{cm}$, $BE = 44{,}8\,\text{cm}$ et $BD = 52\,\text{cm}$.
Les droites (AD) et (CE) se coupent en B.
On note H, le projeté orthogonal de A sur (BC).
De plus, $BH = 56\,\text{cm}$.



1) L'aire du triangle ABC est de $1\,320\,\text{cm}^2$. Montrer que la longueur $AH = 33\,\text{cm}$.

Solution : L'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{AH \times BC}{2}$, puisque H est le pied de la hauteur issue de C. Donc :

$$\frac{AH \times BC}{2} = 1320 \Leftrightarrow \frac{80 \times AH}{2} = 1320 \Leftrightarrow 80 \times AH = 2640 \Leftrightarrow AH = 33$$

Donc $AH = 33\,\text{cm}$.

2) Calculer la longueur AB.

Solution : Puisque le triangle AHB est rectangle en H alors d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 33^2 + 56^2 = 4225$$
$$AC = 65$$

Donc $AB = 65\,\text{cm}$.

3) Déterminer si les droites (AH) et (DE) sont parallèles.

Solution : On compare :

$$\frac{BE}{BH} = \frac{44{,}8}{56} = 0{,}8 \qquad \frac{BD}{AB} = \frac{52}{65} = 0{,}8$$

Puisque $\dfrac{BE}{BH} = \dfrac{BD}{AB}$.
et que les points H, B, E et A, B, D sont alignés dans le même ordre.
alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, (AH) et (DE) sont parallèles.

4) En déduire la distance de D à (BC).

Solution : D'après la question précédente, on peut en déduire que (BE) et (DE) sont perpendiculaires.

Le point E est donc le projeté orthogonal de D sur (BE). On veut calculer ED.

Puisque les droites (AH) et (DE) sont parallèles et que les droites (HE) et (AD) se coupent en B, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BH}}$$

Donc :

$$\mathrm{ED} = \frac{33 \times 44{,}8}{56} = 26{,}4$$

La distance de E à la droite (AB) est de 26,4 cm.

5) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$, arrondie au dixième de degré près.

Solution : On remarque que $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{ABH}}$.

Dans le triangle AHB, rectangle en H, on utilise la tangente :

$$\tan \widehat{\mathrm{ABH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{33}{56}$$

Donc :

$$\widehat{\mathrm{ABC}} \approx 30{,}5°$$

Exercice 4 : (3pt) On considère un triangle DEF, rectangle en E, et tel que DF = 6 cm et $\widehat{\mathrm{EFD}} = 35°$.

Calculer les longueurs DE et EF au dixième de millimètre près.

Solution : Puisque le triangle DEF est rectangle en E, alors on a :

$$\cos \widehat{\mathrm{EFD}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{EF} = \mathrm{DF} \times \cos \widehat{\mathrm{EFD}} = 6 \times \cos 35° \approx 4{,}91\,\mathrm{cm}$$

$$\sin \widehat{\mathrm{EFD}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{DE} = \mathrm{DF} \times \sin \widehat{\mathrm{EFD}} = 6 \times \sin 35° \approx 3{,}44\,\mathrm{cm}$$

Exercice 5 : (2pt) Soit d un entier strictement positif qui est un multiple de 2, de 7 et de 13.

1) Expliquer pourquoi d ne peut pas être inférieur à 100.

Solution : Puisque d est un multiple de 3, de 5 et de 17, il peut s'écrire :

$$d = 2 \times 7 \times 13 \times k = 182k, \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Puisque d est positif et non nul, il est supérieur ou égal à 182 et ne peut donc pas être inférieur à 100.

2) En sachant que $1600 \leq d \leq 1700$, déterminer la valeur de d.

Solution : La seule valeur de k permettant d'avoir $1600 \leq 182k \leq 1700$ est $k = 9$.

Donc $d = 1638$.