Lycée Les 3 Sources — **Bourg-Lès-Valence**

Mathématiques 2$^{\text{de}}$ — Année **2025-26**

Devoir surveillé n°3 – Correction

Exercice 1 : (3pt) Développer et réduire les expressions suivantes :

1) $A = (3x-4)^2$
2) $B = (9x-1)(9x+1)$
3) $C = (3x+2)(x-3)+3(x+5)$
4) $D = 4-2(x+5)^2$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= (3x-4)^2 \\ &= 9x^2-24x+16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (9x-1)(9x+1) \\ &= 81x^2-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (3x+2)(x-3)+3(x+5) \\ &= 3x^2-9x+2x-6+3x+15 \\ &= 3x^2-4x+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 4-2(x+5)^2 \\ &= 4-2(x^2+10x+25) \\ &= 5-2x^2-20x-50 \\ &= -2x^2-20x-45 \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $5(x+3)-8 = x+6$

Solution :

$$\begin{aligned} 5(x+3)-8 = x+6 &\Leftrightarrow 5x+15-8 = x+6 \\ &\Leftrightarrow 5x+7 = x+6 \\ &\Leftrightarrow 4x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

2) $\dfrac{3x-1}{3} = \dfrac{x+4}{2}$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{3} = \frac{x+4}{2} &\Leftrightarrow 2(3x-1) = 3(x+4) \\ &\Leftrightarrow 6x-2 = 3x+12 \\ &\Leftrightarrow 3x = 14 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{14}{3}\right\}$.

Exercice 3 : (2pt) Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble indiqué.

1) $10x-26 = 4x+22$ dans $\mathbb{N}$.

Solution :

$$\begin{aligned} 12x-26 = 5x+30 &\Leftrightarrow 6x = 48 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Puisque $8 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S} = \{8\}$.

2) $3(x+4) = -5$ dans $\mathbb{D}$.

Solution :

$$\begin{aligned} 3(x+4) = -5 &\Leftrightarrow 3x+12 = -5 \\ &\Leftrightarrow 3x = -17 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{17}{3} \end{aligned}$$

Puisque $-\frac{17}{3} \notin \mathbb{D}$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 4 : (4pt) On considère la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = 4(x-2)^2 - 64$.

1) Développer, réduire et ordonner l'expression de la fonction f.

Solution : On développe :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x-2)^2 - 64 \\ &= 4(x^2 - 4x + 4) - 64 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 - 64 \\ &= 4x^2 - 16x - 48 \end{aligned}$$

2) Montrer que $f(x) = 4(x-6)(x+2)$.

Solution : On développe :

$$\begin{aligned} 4(x-6)(x+2) &= 4(x^2 + 2x - 6x - 12) \\ &= 4(x^2 - 4x - 12) \\ &= 4x^2 - 16x - 48 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3) En utilisant la forme la plus adaptée :

a) Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

Solution :

- Avec la forme développée :

$$f(0) = 4 \times 0^2 - 16 \times 0 - 48 = -48$$

- Avec la forme factorisée :

$$f(-2) = 4(-3-6)\underbrace{(-2+2)}_{0} = 0$$

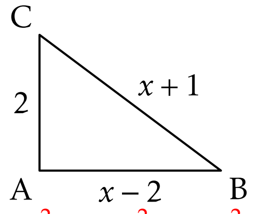
b) Résoudre $f(x) = -64$.

Solution : Avec la forme initale :

$$\begin{aligned} f(x) = -64 &\Leftrightarrow 4(x-2)^2 - 64 = -64 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

Exercice 5 : (2pt) On considère le triangle ABC ci-contre, avec x un nombre réel tel que $x > 2$. Déterminer la ou les valeurs de x telles que ABC soit rectangle en A.



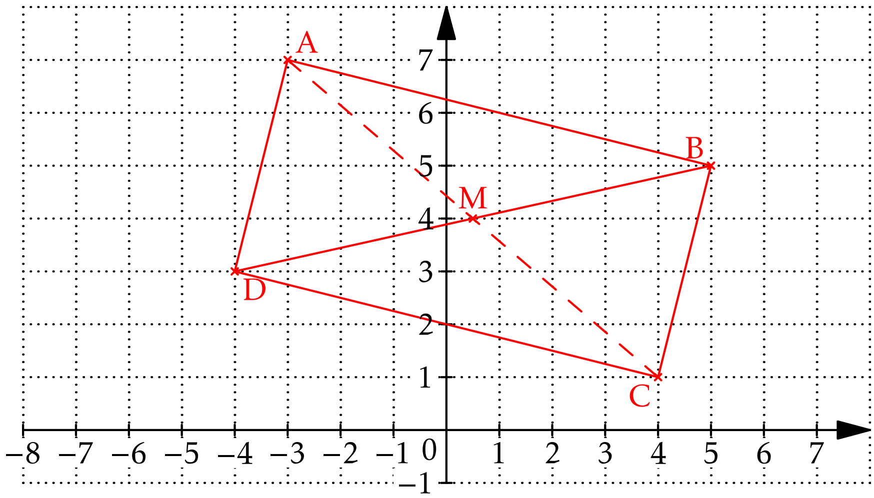
Solution : D'après le théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A si $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} BC^2 = AB^2 + AC^2 &\Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-2)^2 + 2^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4 + 4 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = -4x + 8 \\ &\Leftrightarrow 6x = 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Le triangle est rectangle en A si $x = \frac{7}{6}$.

Or $\frac{7}{6} < 2$, donc il n'y a pas de solution.

Exercice 6 : (7pt) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I,J). On considère les points A(−3;7), B(5;5) et D(−4;3).



1) Placer les points dans le repère ci-dessus. Compléter la figure tout au long de l'exercice.
2) Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

   Solution : On calcule le carré des longueurs :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (5+3)^2 + (5-7)^2 \\ &= (8)^2 + (-2)^2 \\ &= 64 + 4 \\ &= 68 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AD^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 \\ &= (-4+3)^2 + (3-7)^2 \\ &= 1^2 + (-4)^2 \\ &= 1 + 16 \\ &= 17 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BD^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 \\ &= (-4-5)^2 + (3-5)^2 \\ &= (-9)^2 + (-2)^2 \\ &= 81 + 4 \\ &= 85 \end{aligned}$$

   On remarque que $AB^2 + AD^2 = BD^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

3) a) On note M le milieu du segment [BD]. Calculer les coordonnées de M.

   Solution :
   On calcule :

$$x_M = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{5+3}{2} = 4$$

b) Soit C le point tel que ABCD est un parallélogramme. Calculer les coordonnées de C.

Solution : Puisque ABCD est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu M et donc M est le milieu de [AC]. On a donc :

$$\begin{aligned} & \frac{x_C + x_A}{2} = x_E \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_C - 3}{2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x_C = 1 + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x_C = 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \frac{y_C + y_A}{2} = y_E \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{y_C + 7}{2} = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & y_C = 8 - 7 \\ \Leftrightarrow \quad & y_C = 1 \end{aligned}$$

Les coordonnées de C sont donc $(4;1)$.

c) En utilisant les questions 2 et 3, que peut-on dire de plus sur ABCD?
Solution : ABCD est un parallélogramme ayant un angle droit donc c'est un rectangle.