Devoir surveillé n°3 – Correction

Exercice 1 : (3pt) Développer et réduire les expressions suivantes :

1) $A = (4x-3)^2$
2) $B = (7x-1)(7x+1)$
3) $C = (2x+1)(x-5)+2(x+4)$
4) $D = 5-2(x+3)^2$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= (4x-3)^2 \\ &= 16x^2-24x+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (7x-1)(7x+1) \\ &= 49x^2-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2x+1)(x-5)+2(x+4) \\ &= 2x^2-10x+x-5+2x+8 \\ &= 2x^2-7x+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 5-2(x+3)^2 \\ &= 5-2(x^2+6x+9) \\ &= 5-2x^2-12x-18 \\ &= -2x^2-12x-13 \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $4(x+2)-7 = x+6$

Solution :

$$\begin{aligned} 4(x+2)-7 = x+6 &\Leftrightarrow 4x+8-7 = x+6 \\ &\Leftrightarrow 4x+1 = x+6 \\ &\Leftrightarrow 3x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

2) $\frac{4x-1}{2} = \frac{x+3}{3}$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{2} = \frac{x+3}{3} &\Leftrightarrow 3(4x-1) = 2(x+3) \\ &\Leftrightarrow 12x-3 = 2x+6 \\ &\Leftrightarrow 10x = 9 \\ &\Leftrightarrow x = 0{,}9 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{0{,}9\}$.

Exercice 3 : (2pt) Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble indiqué.

1) $12x-26 = 5x+30$ dans $\mathbb{N}$.

Solution :

$$\begin{aligned} 12x-26 = 5x+30 &\Leftrightarrow 7x = 56 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Puisque $8 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S} = \{8\}$.

2) $3(x+5)=-2$ dans $\mathbb{D}$.

Solution :

$$\begin{aligned} 3(x+5)=-2 &\Leftrightarrow 3x+15=-2 \\ &\Leftrightarrow 3x=-17 \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{17}{3} \end{aligned}$$

Puisque $-\dfrac{17}{3} \notin \mathbb{D}$, $\mathcal{S}=\emptyset$.

Exercice 4 : (4pt) On considère la fonction $f(x)$ définie par $f(x)=2(x-2)^2-50$.

1) Développer, réduire et ordonner l'expression de la fonction f.

Solution : On développe :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-2)^2-50 \\ &= 2(x^2-4x+4)-50 \\ &= 2x^2-8x+8-50 \\ &= 2x^2-8x-42 \end{aligned}$$

2) Montrer que $f(x)=2(x-7)(x+3)$.

Solution : On développe :

$$\begin{aligned} 2(x-7)(x+3) &= 2(x^2+3x-7x-21) \\ &= 2(x^2-4x-21) \\ &= 2x^2-8x-42 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3) En utilisant la forme la plus adaptée :

a) Calculer $f(0)$ et $f(-3)$.

Solution :

- Avec la forme développée :

$$f(0)=2\times 0^2-8\times 0-42=-42$$

- Avec la forme factorisée :

$$f(-3)=2(-3-7)\underbrace{(-3+3)}_{0}=0$$

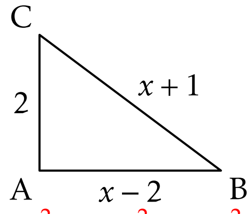
b) Résoudre $f(x)=-50$.

Solution : Avec la forme initale :

$$\begin{aligned} f(x)=-50 &\Leftrightarrow 2(x-2)^2-50=-50 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\{2\}$.

Exercice 5 : (2pt) On considère le triangle ABC ci-contre, avec x un nombre réel tel que $x > 2$. Déterminer la ou les valeurs de x telles que ABC soit rectangle en A.



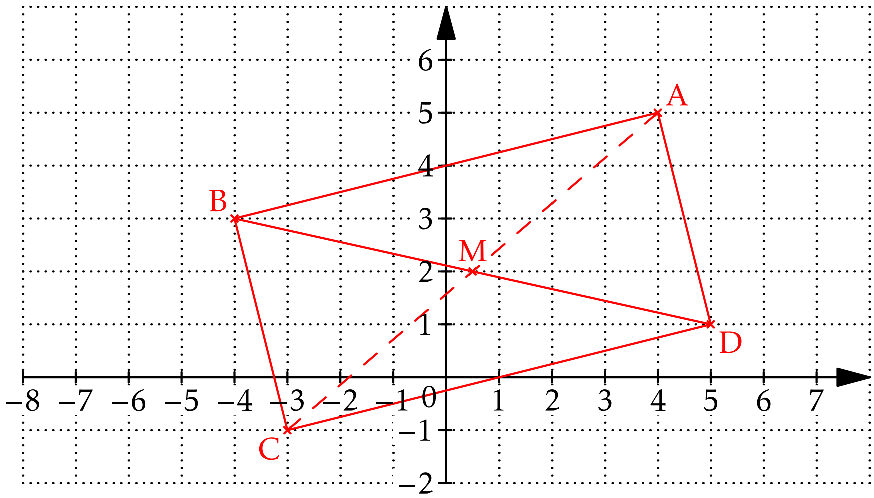
Solution : D'après le théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A si $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} BC^2 = AB^2 + AC^2 &\Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-2)^2 + 2^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4 + 4 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = -4x + 8 \\ &\Leftrightarrow 6x = 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Le triangle est rectangle en A si $x = \dfrac{7}{6}$.

Or $\dfrac{7}{6} < 2$, donc il n'y a pas de solution.

Exercice 6 : (7pt) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I,J). On considère les points A(4;5), B(−4;3) et D(5;1).



1) Placer les points dans le repère ci-dessus. Compléter la figure tout au long de l'exercice.
2) Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

Solution : On calcule le carré des longueurs :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (-4-4)^2 + (3-5)^2 \\ &= (-8)^2 + (-2)^2 \\ &= 64 + 4 \\ &= 68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 \\ &= (5-4)^2 + (1-5)^2 \\ &= 1^2 + (-4)^2 \\ &= 1 + 16 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 \\ &= (5-(-4))^2 + (1-3)^2 \\ &= 9^2 + (-2)^2 \\ &= 81 + 4 \\ &= 85 \end{aligned}$$

On remarque que $AB^2 + AD^2 = BD^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

3) a) On note M le milieu du segment [BD]. Calculer les coordonnées de M.

Solution :

On calcule :

$$x_M = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{1+3}{2} = 2$$

b) Soit C le point tel que ABCD est un parallélogramme. Calculer les coordonnées de C.

Solution : Puisque ABCD est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu M et donc M est le milieu de [AC]. On a donc :

$$\begin{aligned} & \frac{x_C + x_A}{2} = x_E \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_C + 4}{2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x_C = 1 - 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x_C = -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \frac{y_C + y_A}{2} = y_E \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{y_C + 5}{2} = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & y_C = 4 - 5 \\ \Leftrightarrow \quad & y_C = -1 \end{aligned}$$

Les coordonnées de C sont donc $(-3; -1)$.

c) En utilisant les questions 2 et 3, que peut-on dire de plus sur ABCD?
Solution : ABCD est un parallélogramme ayant un angle droit donc c'est un rectangle.