

Devoir surveillé n°6 – Correction

Nom :

Prénom :

**EXERCICE 1 :** (4pt) Dans une salle de sport, deux formules d'abonnement sont proposées :

- **Formule 1 :** un abonnement mensuel à 20€, auquel s'ajoutent 4,50€ par séance.
- **Formule 2 :** un abonnement mensuel à 30€, auquel s'ajoutent 3€ par séance.

On note  $x$  le nombre de séances mensuelles effectuées par un abonné.

- 1) Exprimer, en fonction de  $x$ , le coût mensuel  $f(x)$  pour la formule 1 et  $g(x)$  pour la formule 2.

**Solution :**  $f(x) = 4,5x + 20$  et  $g(x) = 3x + 30$ .

- 2) Pour un abonné réalisant **5 séances par mois**, quelle formule est la plus économique? Justifiez votre réponse.

**Solution :** On calcule les images de 5 par les 2 fonctions :

$$\begin{aligned} f(5) &= 4,5 \times 5 + 20 \\ &= 42,50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(5) &= 3 \times 5 + 30 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Il vaut mieux choisir la formule 1 pour ne payer que 42,50€ au lieu de 45€.

- 3) Un abonné dispose d'un budget mensuel de 120€. Quelle formule lui conseilleriez-vous?

**Solution :** On cherche les antécédents de 120 par les 2 fonctions.

$$\begin{aligned} f(x) = 120 &\Leftrightarrow 4,5x + 20 = 120 \\ &\Leftrightarrow 4,5x = 100 \\ &\Leftrightarrow x \approx 22,22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = 120 &\Leftrightarrow 3x + 30 = 120 \\ &\Leftrightarrow 3x = 90 \\ &\Leftrightarrow x = 30 \end{aligned}$$

Il vaut mieux choisir la formule 2 qui permet de faire 30 séances, contre 20 avec la formule 1.

- 4) À partir de combien de séances mensuelles la **formule 2** devient-elle plus avantageuse que la formule 1?

**Solution :** On résout :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow 4,5x + 20 \leq 3x + 30 \\ &\Leftrightarrow 1,5x \leq 10 \\ &\Leftrightarrow 1,5x \leq \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Puisque  $\frac{20}{3} \approx 6,7$ , la formule 2 est plus avantageuse à partir de 7 séances.

**EXERCICE 2 :** (3pt) Un gérant d'une résidence de vacances propose une offre de location qui comprend un forfait pour les 3 premières nuits et un prix par nuits supplémentaires. En appelant  $f$  la fonction affine qui à tout séjour de  $x$  nuits fait correspondre le montant en euros à payer pour un client, il obtient les deux égalités suivantes :  $f(4) = 152$  et  $f(6) = 244$ .

- 1) Déterminer l'expression de  $f(x)$ .

**Solution :** On calcule le coefficient directeur :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{244 - 152}{2} = \frac{92}{2} = 46$$

On a donc  $f(x) = 46x + p$ . On utilise  $x = 6$ :

$$46 \times 6 + p = f(6) \Leftrightarrow 276 + p = 244 \Leftrightarrow p = -32$$

Donc  $f(x) = 46x - 32$ .

2) Combien est-ce que cela coûte le forfait pour 3 nuits.

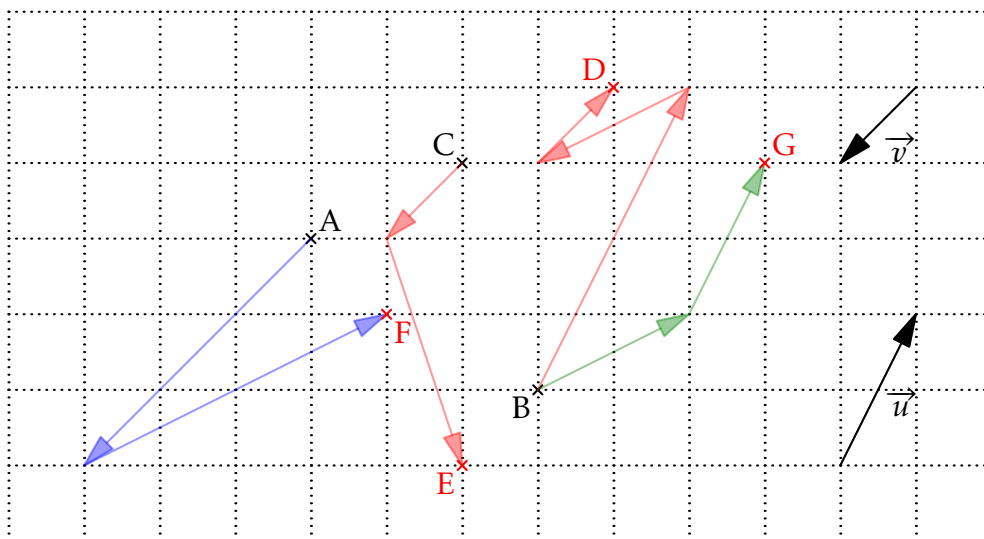
**Solution :** Pour 3 nuits, le prix est de :

$$f(3) = 46 \times 3 - 32 = 106 \text{ €}$$

3) Combien coûte chaque nuit supplémentaire.

**Solution :** Pour toute nuit supplémentaire, le prix augmente de 46 €, qui est le coefficient directeur. C'est donc le prix d'une nuit supplémentaire.

**EXERCICE 3 :** (4pt) On considère la figure ci-dessous.



1) a) Construire le point D, tel que  $\overrightarrow{BD} = 2\vec{u} + \overrightarrow{CA} - \vec{v}$ .

b) Construire le point E, tel que  $\overrightarrow{CE} = \vec{v} - \overrightarrow{BC}$ .

2) Soit F, tel que  $\overrightarrow{FA} = -3\vec{v} + 2\overrightarrow{CA}$ .

a) Compléter l'égalité  $\overrightarrow{AF} = \dots$

**Solution :** On a :

$$\overrightarrow{FA} = -3\vec{v} + 2\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = 3\vec{v} + 2\overrightarrow{AC}$$

b) Placer F dans le repère.

3) Soit G, tel que  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GB} + \vec{u}$ .

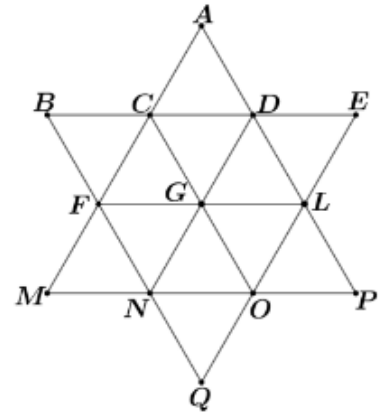
a) Compléter l'égalité  $\overrightarrow{BG} = \dots$

**Solution :** On a :

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GB} + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \vec{u}$$

b) Placer G dans le repère.

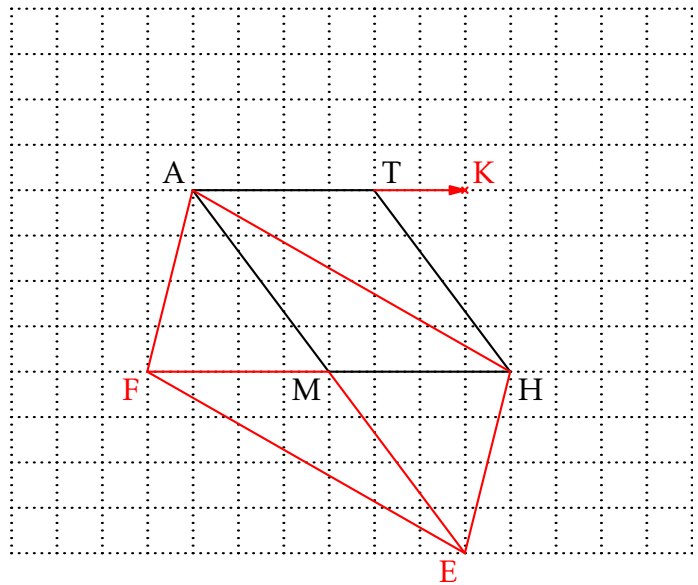
**EXERCICE 4 :** (2pt) En utilisant les propriétés de la figure ci-contre constituée de triangles tous équilatéraux, et en utilisant uniquement les points de la figure, exprimer les vecteurs suivants à l'aide d'un seul vecteur.



- 1)  $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{CM}$
- 2)  $\overrightarrow{QF} - \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{QB}$
- 3)  $\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{FB}$
- 4)  $\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{EM}$

**EXERCICE 5 :** (3,5pt) On considère le parallélogramme MATH ci-contre.

- 1) a) Construire l'image E de H par la translation de vecteur  $\overrightarrow{TM}$ .  
b) Démontrer que  $\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{ME}$ .  
c) En déduire que M est le milieu de [AE].
- 2) Construire l'image F de M par la translation de vecteur  $\overrightarrow{TA}$ .
- 3) On admet que M est le milieu de [HF]. En déduire la nature de AFEH.



**Solution :**

- 1) a) Sur la figure.  
b) Puisque E est l'image de H par la translation de vecteur  $\overrightarrow{TM}$ , alors  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{TM}$ .  
Donc HEMT est un parallélogramme.  
On en déduit que  $\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{ME}$ .  
c) Puisque MATH est un parallélogramme,  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{TH}$ .  
D'après la question précédente, on a  $\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{ME}$ .  
Le point M est donc le milieu de [AE].
- 2) Sur la figure.
- 3) Puisque M est le milieu de [AE] et de [HF], on en déduit que AFEH est un parallélogramme.

**EXERCICE 6 :** (1,5pt) Dans la figure ci-dessus, placer le point K tel que  $\overrightarrow{TK} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{MT}$ . Justifier votre construction.

**Solution :** On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TK} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{MT} &\Leftrightarrow \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{TK} = \overrightarrow{MT} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{TK} = \overrightarrow{MT} - \overrightarrow{HT} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{TK} = \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TH} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{TK} = \overrightarrow{MH} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{TK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MH}\end{aligned}$$

**EXERCICE 7 :** (3pt) On considère un triangle ABC et les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

1) Montrer que  $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

**Solution :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2) Montrer que  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$ .  
Que peut-on en conclure?

**Solution :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} \\ &= -\overrightarrow{CN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{CN} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Le point N est donc le milieu du segment [MP].