**Lycée Les 3 Sources** **Bourg-Lès-Valence**

**Mathématiques $2^{de}$** Année **2025-26**

## Devoir surveillé n°6 – Correction

**Nom :**

**Prénom :**

<u>**Exercice 1 :**</u> (4pt) Dans une salle de sport, deux formules d'abonnement sont proposées :

- **Formule 1** : un abonnement mensuel à 20 €, auquel s'ajoutent 4,50 € **par séance**.
- **Formule 2** : un abonnement mensuel à 30 €, auquel s'ajoutent 3 € **par séance**.

On note $x$ le nombre de séances mensuelles effectuées par un abonné.

1) Exprimer, en fonction de $x$, le coût mensuel $f(x)$ pour la formule 1 et $g(x)$ pour la formule 2.
   <u>**Solution :**</u> $f(x) = 4{,}5x + 20$ et $g(x) = 3x + 30$.
2) Pour un abonné réalisant **8 séances par mois**, quelle formule est la plus économique ? Justifiez votre réponse.
   <u>**Solution :**</u> On calcule les images de 8 par les 2 fonctions :

$$f(8) = 4{,}5 \times 8 + 20 = 56 \qquad g(8) = 3 \times 8 + 30 = 54$$

   Il vaut mieux choisir la formule 2 pour ne payer que 54 € au lieu de 56 €.
3) Un abonné dispose d'un budget mensuel de 120 €. Quelle formule lui conseilleriez-vous ?

   <u>**Solution :**</u> On cherche les antécédents de 120 par les 2 fonctions.

$$f(x) = 120 \Leftrightarrow 4{,}5x + 20 = 120 \Leftrightarrow 4{,}5x = 100 \Leftrightarrow x \approx 22{,}22$$

$$g(x) = 120 \Leftrightarrow 3x + 30 = 120 \Leftrightarrow 3x = 90 \Leftrightarrow x = 30$$

   Il vaut mieux choisir la formule 2 qui permet de faire 30 séances, contre 20 avec la formule 1.
4) À partir de combien de séances mensuelles la **formule** 2 devient-elle plus avantageuse que la formule 1 ?
   <u>**Solution :**</u> On résout :

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 4{,}5x + 20 \leq 3x + 30 \Leftrightarrow 1{,}5x \leq 10 \Leftrightarrow 1{,}5x \leq \frac{20}{3}$$

   Puisque $\frac{20}{3} \approx 6{,}7$, la formule 2 est plus avantageuse à partir de 7 séances.

<u>**Exercice 2 :**</u> (3pt) Un gérant d'une résidence de vacances propose une offre de location qui comprend un forfait pour les 3 premières nuits et un prix par nuits supplémentaires.
En appelant $f$ la fonction affine qui à tout séjour de $x$ nuits fait correspondre le montant en euros à payer pour un client, il obtient les deux égalités suivantes : $f(4) = 152$ et $f(6) = 240$.

1) Déterminer l'expression de $f(x)$.

**Solution :** On calcule le coefficient directeur :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{240 - 152}{2} = \frac{88}{2} = 44$$

On a donc $f(x) = 44x + p$. On utilise $x = 6$ :

$$44 \times 6 + p = f(6) \iff 264 + p = 240 \iff p = -24$$

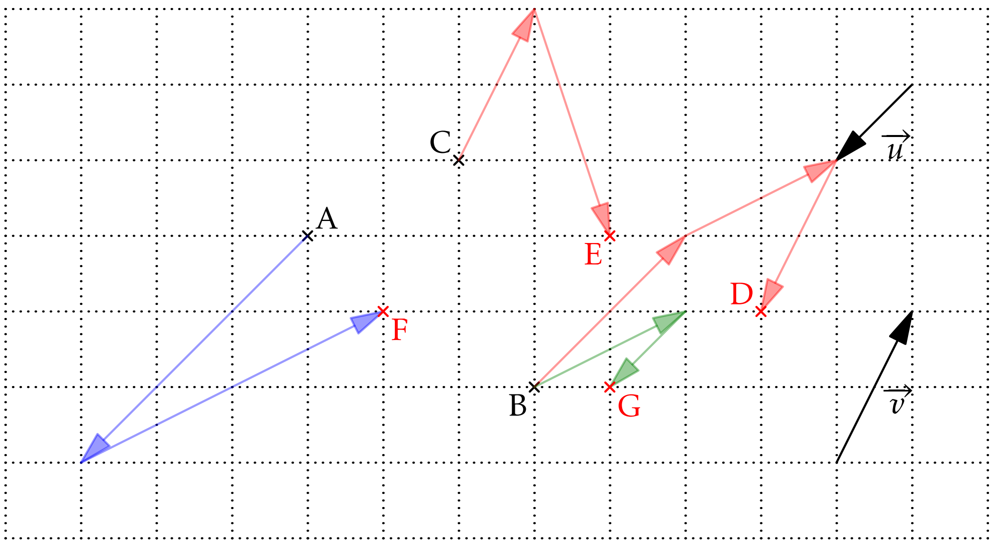
Donc $f(x) = 44x - 24$.

2) Combien est-ce que cela coûte le forfait pour 3 nuits.
**Solution :** Pour 3 nuits, le prix est de :

$$f(3) = 44 \times 3 - 24 = 108\,€$$

3) Combien coûte chaque nuit supplémentaire.
**Solution :** Pour toute nuit supplémentaire, le prix augmente de 44 €, qui est le coefficient directeur. C'est donc le prix d'une nuit supplémentaire.

**Exercice 3 :** (4pt) On considère la figure ci-dessous.




1) a) Construire le point D, tel que $\overrightarrow{BD} = -2\vec{u} + \overrightarrow{AC} - \vec{v}$.
   b) Construire le point E, tel que $\overrightarrow{CE} = \vec{v} - \overrightarrow{BC}$.
2) Soit F, tel que $\overrightarrow{FA} = -3\vec{u} + 2\overrightarrow{CA}$.
   a) Compléter l'égalité $\overrightarrow{AF} = \ldots$
   **Solution :** On a :

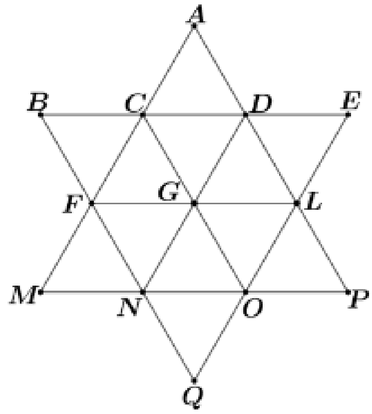
$$\overrightarrow{FA} = -3\vec{u} + 2\overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{AF} = 3\vec{u} + 2\overrightarrow{AC}$$

   b) Placer F dans le repère.
3) Soit G, tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GB} + \vec{u}$.
   a) Compléter l'égalité $\overrightarrow{BG} = \ldots$
   **Solution :** On a :

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GB} + \vec{u} \iff \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \vec{u}$$

b) Placer G dans le repère.

**Exercice 4 :** (2pt) En utilisant les propriétés de la figure ci-contre constituée de triangles tous équilatéraux, et en utilisant uniquement les points de la figure, exprimer les vecteurs suivants à l'aide d'un seul vecteur.




1) $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{CM}$

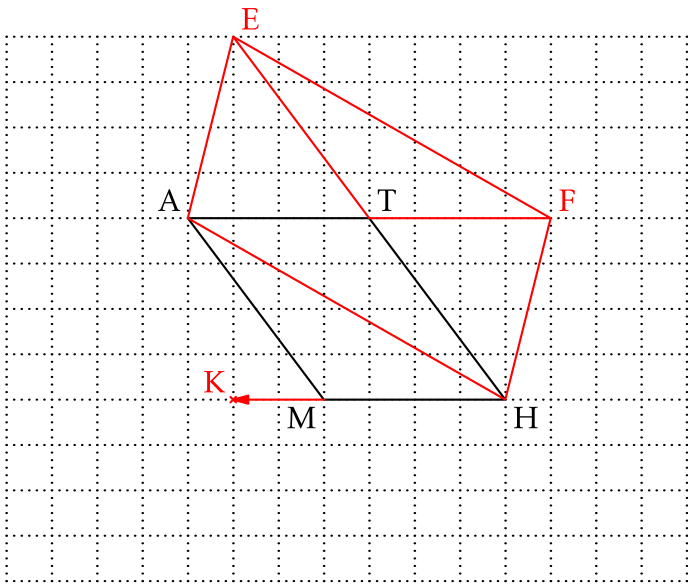
2) $\overrightarrow{QF} - \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{QB}$

3) $\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{FB}$

4) $\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{EM}$

**Exercice 5 :** (3,5pt) On considère le parallélogramme MATH ci-contre.

1) a) Construire l'image E de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MT}$.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{TE}$.
   c) En déduire que T est le milieu de [HE].
2) Construire l'image F de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{MH}$.
3) On admet que T est le milieu de [AF]. En déduire la nature de AEFH.




**Solution :**

1) a) Sur la figure.
   b) Puisque E est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MT}$, alors $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{MT}$.
   Donc AETM est un parallélogramme.
   On en déduit que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{TE}$.
   c) Puisque MATH est un parallélogramme, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HT}$.
   D'après la question précédente, on a $\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{TE}$.
   Le point T est donc le milieu de [HE].
2) Sur la figure.
3) Puisque T est le milieu de [HE] et de [AF], on en déduit que AEFH est un parallélogramme.

**Exercice 6 :** (1,5pt) Dans la figure ci-dessus, placer le point K tel que $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{TM}$. Justifier votre construction.

**Solution :** On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{TM} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{TM}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{TM}-\overrightarrow{AM}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{MA}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{TA}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{TA}
\end{aligned}$$

**Exercice 7 :** (3pt) On considère un triangle ABC et les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\ \text{ et }\ \overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

   **Solution :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\
&=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\
&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\
&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

2) Montrer que $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MN}$.
   Que peut-on en conclure?

   **Solution :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NP}&=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}\\
&=-\overrightarrow{CN}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\
&=-\overrightarrow{CN}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\
&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\
&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\
&=\overrightarrow{MN}
\end{aligned}$$

   Le point N est donc le milieu du segment [MP].