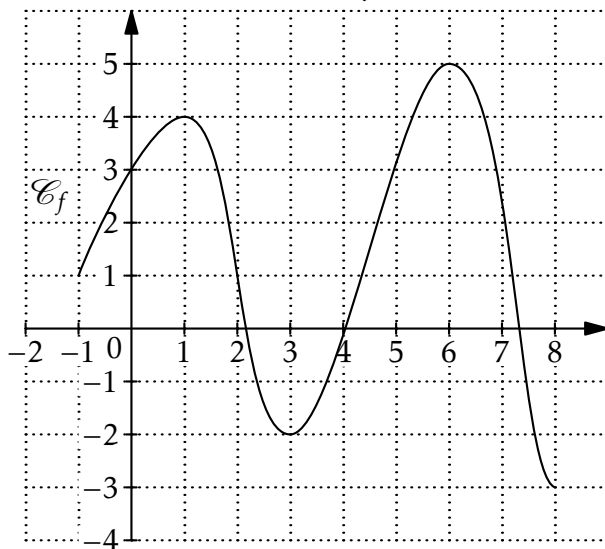


Devoir surveillé n°7 – Correction

Nom :

Prénom :

EXERCICE 1 : (5pt) On donne la courbe suivante \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f :



1) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $[-1; 8]$.

Solution :

x	-1	1	3	6	8
$f(x)$	1	4	-2	5	-3

2) Déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [2; 7]$.

Solution : Si $x \in [2; 7]$, alors $f(x) \in [-2; 5]$.

3) Comparer les nombres suivants lorsque cela est possible. Justifier vos réponses.

a) $f(5, 2)$ et $f(3, 4)$

b) $f(1, 4)$ et $f(1, 8)$

Solution :

a) La fonction f est croissante sur $[3; 6]$. Donc $f(5, 2) > f(3, 4)$.

b) La fonction f est décroissante sur $[1; 3]$. Donc $f(1, 4) > f(1, 8)$.

4) Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 8]$, en quelle valeur est-il atteint?

Solution : Sur l'intervalle $[-1; 8]$, le minimum est -3 et il est atteint en $x = 8$.

5) Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 8]$, en quelle valeur est-il atteint?

Solution : Sur l'intervalle $[-1; 8]$, le maximum est 5 et il est atteint en $x = 6$.

6) Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 4]$, en quelle valeur est-il atteint?

Solution : Sur l'intervalle $[-1; 4]$, le maximum est 4 et il est atteint en $x = 1$.

EXERCICE 2 : (2pt) On considère le repère ci-contre.

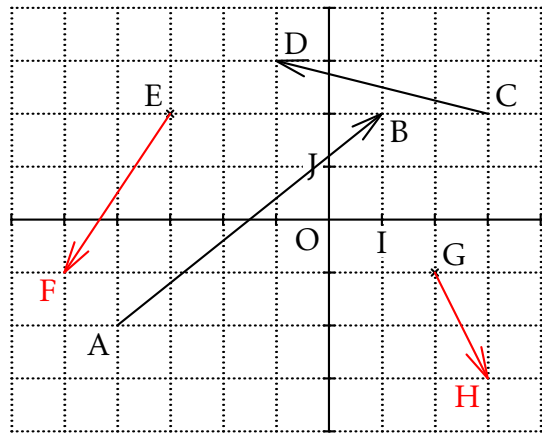
1) Compléter les coordonnées des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Placer les points F et H tels que $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



EXERCICE 3 : (2pt) Dans un repère du plan, on considère les points $E(-2;3)$, $F(6;-11)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \overrightarrow{EF} et \vec{u} sont-ils colinéaires?

Solution : On calcule les coordonnées de \overrightarrow{EF} :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 + 2 \\ -11 - 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

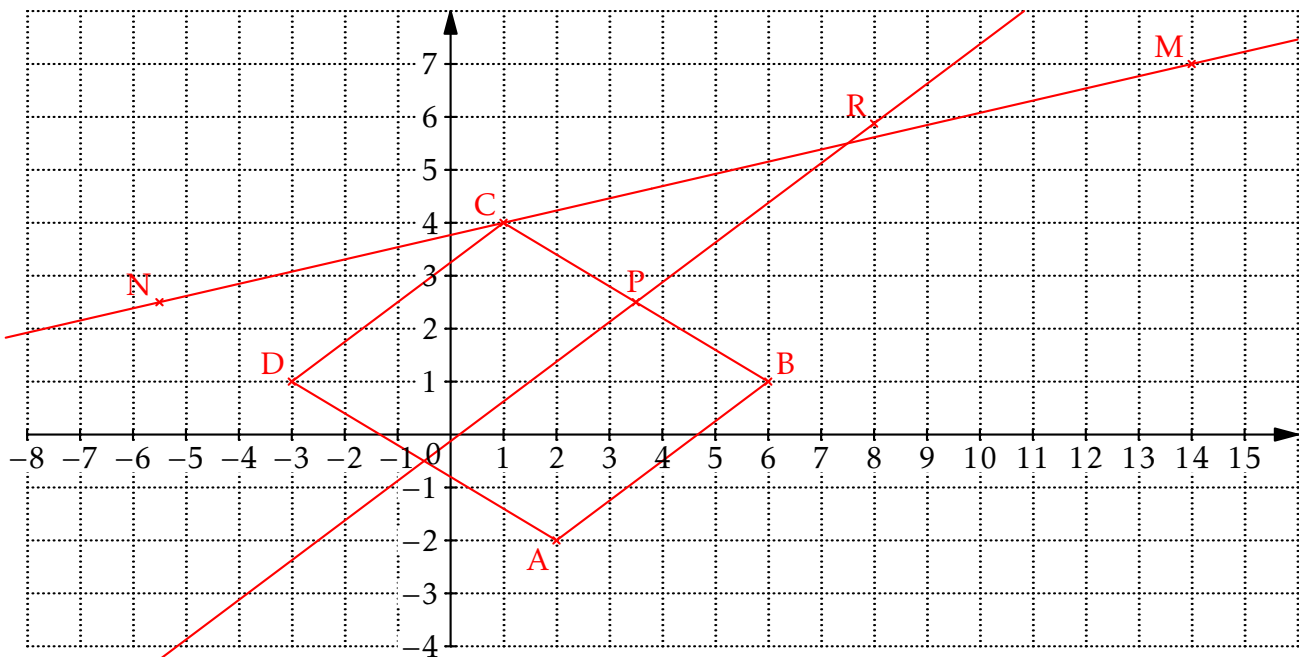
On calcule le déterminant de \overrightarrow{EF} et de \vec{u} .

$$\det(\overrightarrow{EF}; \vec{u}) = 8 \times 3,5 - (-14) \times 2 = 56$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

EXERCICE 4 : (7pt) Dans un repère du plan, on considère les points $A(2;-2)$, $B(6;1)$, $C(1;4)$ et $D(-3;1)$.

1) Placer les points dans le repère orthonormé ci-dessous.



2) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution : On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puisque les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont égaux alors ABCD est un parallélogramme.

3) Placer les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

4) Calculer les coordonnées des points M et N.

Solution : On a :

$$\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow x_M - x_B = -2 \times (2 - 6) \text{ et } y_M - y_B = -2 \times (-2 - 1)$$

On résout les deux équations :

$$\begin{array}{ll} x_M - x_B = -2 \times (-4) & y_M - y_B = -2 \times (-3) \\ \Leftrightarrow x_M - 6 = 8 & \Leftrightarrow y_M - 1 = 6 \\ \Leftrightarrow x_M = 14 & \Leftrightarrow y_M = 7 \end{array}$$

Ainsi les coordonnées de M sont (14;7).

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow x_N - x_A = \frac{3}{2} \times (-3 - 2) \text{ et } y_N - y_A = \frac{3}{2} \times (1 - (-2))$$

On résout les deux équations :

$$\begin{array}{ll} x_N - x_A = \frac{3}{2} \times (-5) & y_N - y_A = \frac{3}{2} \times 3 \\ \Leftrightarrow x_N - 2 = -\frac{15}{2} & \Leftrightarrow y_N + 2 = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow x_N = -\frac{11}{2} & \Leftrightarrow y_N = \frac{5}{2} \end{array}$$

Ainsi les coordonnées de N sont $\left(-\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

5) Démontrer que les points M, C et N sont alignés.

Solution :

On calcule les coordonnées de \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{CN} . On a :

$$\overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} x_C - x_M \\ y_C - y_M \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} 1 - 14 \\ 4 - 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} x_N - x_C \\ y_N - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} - 1 \\ \frac{5}{2} - 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On effectue les produits en croix :

$$\begin{cases} -13 \times \frac{-11}{2} = 19,5 \\ -3 \times \frac{-13}{2} = 19,5 \end{cases}$$

Puisque les produits en croix sont égaux alors les vecteurs \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{CN} sont colinéaires et donc les points M, C et N sont alignés.

6) Soit $P\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ et R le point de coordonnées $(8, y)$, où y est un réel.

Déterminer la valeur de y pour que (PR) et (AB) soient parallèles.

Solution : On calcule les coordonnées de \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{AB} . On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 8 - \frac{7}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque les droites (PR) et (AB) sont parallèles alors les vecteurs \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, donc les produits en croix sont égaux.

Ainsi :

$$4 \times \left(y - \frac{5}{2}\right) = 3 \times \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4y - 10 = \frac{27}{2} \Leftrightarrow 4y = \frac{47}{2} \Leftrightarrow y = \frac{47}{8}$$

Pour que les droites (PR) et (AB) soient parallèles, le point R a pour coordonnées $\left(8; \frac{47}{8}\right)$

EXERCICE 5 : (5pt) On considère les points $A(1; -3)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 5)$ et $D(5, -1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. On suppose que ABCD est un parallélogramme.

1) Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC?

Solution : On calcule les longueurs :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} & AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} & BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - (-3))^2} & &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (5 - (-3))^2} & &= \sqrt{(2 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2} & &= \sqrt{1^2 + 8^2} & &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9 + 36} & &= \sqrt{1 + 64} & &= \sqrt{16 + 4} \\ &= \sqrt{45} & &= \sqrt{65} & &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Puisque on a $AB^2 + BC^2 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

2) En déduire la nature du parallélogramme ABCD.

Solution : Puisque le parallélogramme ABCD a un angle droit en B alors c'est un rectangle.

3) Déterminer les coordonnées du point E milieu de [AC].

Solution :

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$$

$$y_E = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

Le point E a pour coordonnées (1,5;1).

4) Calculer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées tel que les points D, E et F soient alignés.

Solution : On note y l'ordonnée de F. On a donc :

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 5 - 1,5 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 3,5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 0 - 5 \\ y - (-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} -5 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

Puisque les points sont alignés, on a :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{DF}) = 0 &\Leftrightarrow 3,5 \times (y + 1) - (-2)(-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3,5y + 3,5 - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3,5y = 6,5 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{13}{7} \end{aligned}$$

Les coordonnées de F sont donc $(0; \frac{13}{7})$.