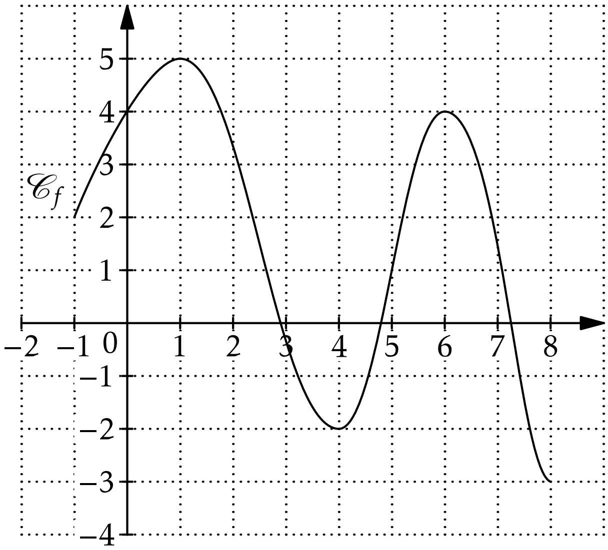
Devoir surveillé n°7 – Correction

Nom :
Prénom :

Exercice 1 : (5pt) On donne la courbe suivante $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f :



1) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $[-1;8]$.
Solution :

x	-1	1	4	6	8
$f(x)$	2 ↗	5 ↘	-2 ↗	4 ↘	-3

2) Déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [2;7]$.
Solution : Si $x \in [2;7]$, alors $f(x) \in [-2;4]$.

3) Comparer les nombres suivants lorsque cela est possible. Justifier vos réponses.
a) $f(1{,}5)$ et $f(1{,}7)$
b) $f(4{,}5)$ et $f(5{,}5)$

Solution :
a) La fonction f est décroissante sur $[1;4]$. Donc $f(1{,}5) > f(1{,}7)$.
b) La fonction f est croissante sur $[4;6]$. Donc $f(4{,}5) < f(5{,}5)$.

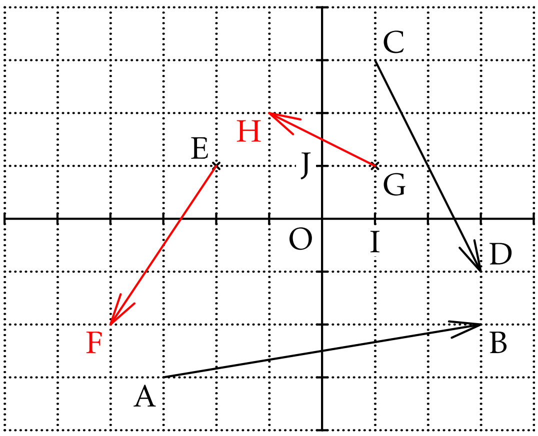
4) Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-1;8]$, en quelle valeur est-il atteint?
Solution : Sur l'intervalle $[-1;8]$, le minimum est -3 et il est atteint en $x = 8$.

5) Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1;8]$, en quelle valeur est-il atteint?
Solution : Sur l'intervalle $[-1;8]$, le maximum est 5 et il est atteint en $x = 1$.

6) Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[4;8]$, en quelle valeur est-il atteint?

Solution : Sur l'intervalle $[4;8]$, le maximum est 4 et il est atteint en $x = 6$.

Exercice 2 : (2pt) On considère le repère ci-contre.



1) Compléter les coordonnées des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

2) Placer les points F et H tels que $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 3 : (2pt) Dans un repère du plan, on considère les points A(−3; 2), B(11; −6) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3{,}5\\2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont-ils colinéaires?

Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11-(-3)\\-6-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}14\\-8\end{pmatrix}$$

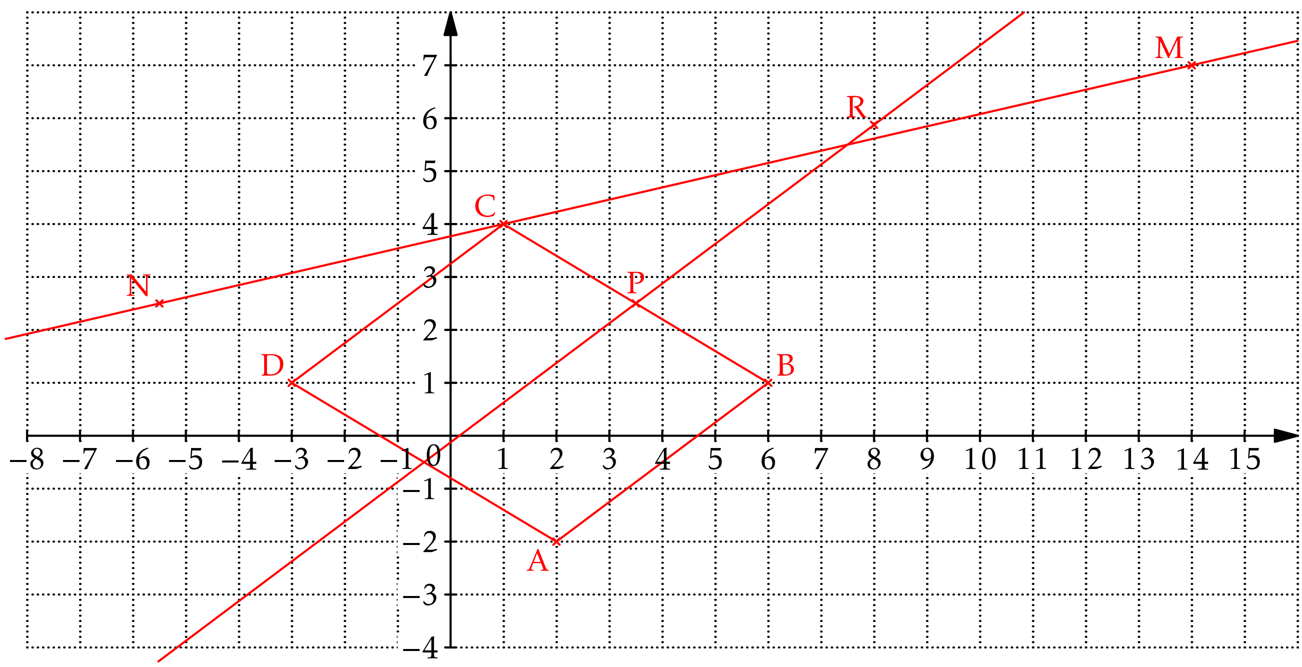
On calcule le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\vec{u}$.

$$\det(\overrightarrow{AB};\vec{u}) = 14\times 2-(-8)\times 3{,}5 = 56$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 4 : (7pt) Dans un repère du plan, on considère les points A(2; −2), B(6; 1), C(1; 4) et D(−3; 1).

1) Placer les points dans le repère orthonormé ci-dessous.



2) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-2 \\ \\ 1-(-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ \\ 4-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux alors ABCD est un parallélogramme.

3) Placer les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

4) Calculer les coordonnées des points M et N.

Solution : On a :

$$\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA} \quad \Leftrightarrow \quad x_M - x_B = -2 \times (2-6) \text{ et } y_M - y_B = -2 \times (-2-1)$$

On résout les deux équations :

$$\begin{aligned} & x_M - x_B = -2 \times (-4) \\ \Leftrightarrow \quad & x_M - 6 = 8 \\ \Leftrightarrow \quad & x_M = 14 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & y_M - y_B = -2 \times (-3) \\ \Leftrightarrow \quad & y_M - 1 = 6 \\ \Leftrightarrow \quad & y_M = 7 \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de M sont $(14;7)$.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \quad \Leftrightarrow \quad x_N - x_A = \frac{3}{2} \times (-3-2) \text{ et } y_N - y_A = \frac{3}{2} \times (1-(-2))$$

On résout les deux équations :

$$\begin{aligned} & x_N - x_A = \frac{3}{2} \times (-5) \\ \Leftrightarrow \quad & x_N - 2 = -\frac{15}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x_N = -\frac{11}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & y_N - y_A = \frac{3}{2} \times 3 \\ \Leftrightarrow \quad & y_N + 2 = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & y_N = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de N sont $\left(-\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right)$.

5) Démontrer que les points M, C et N sont alignés.

Solution :

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{CN}$. On a :

$$\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} x_C - x_M \\ \\ y_C - y_M \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} 1-14 \\ \\ 4-7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} -13 \\ \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} x_N - x_C \\ \\ y_N - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} - 1 \\ \frac{5}{2} - 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On effectue les produits en croix :

$$\begin{cases} -13\times\dfrac{-11}{2}=19{,}5 \\ -3\times\dfrac{-13}{2}=19{,}5 \end{cases}$$

Puisque les produits en croix sont égaux alors les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires et donc les points M, C et N sont alignés.

6) Soit $P\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ et R le point de coordonnées $(8{,}y)$, où y est un réel.
Déterminer la valeur de y pour que (PR) et (AB) soient parallèles.
Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{AB}$. On a :

$$\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} x_R-x_P \\ y_R-y_P \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 8-\dfrac{7}{2} \\ y-\dfrac{5}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} \dfrac{9}{2} \\ y-\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puisque les droites (PR) et (AB) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les produits en croix sont égaux.
Ainsi :

$$4\times\left(y-\frac{5}{2}\right)=3\times\frac{9}{2} \Leftrightarrow 4y-10=\frac{27}{2} \Leftrightarrow 4y=\frac{47}{2} \Leftrightarrow y=\frac{47}{8}$$

Pour que les droites (PR) et (AB) soient parallèles, le point R a pour coordonnées $\left(8;\dfrac{47}{8}\right)$

Exercice 5 : (5pt) On considère les points $A(1;-3)$, $B(-2;3)$, $C(2;5)$ et $D(5,-1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. On suppose que ABCD est un parallélogramme.

1) Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
Solution : On calcule les longueurs :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2+(3-(-3))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+6^2} \\ &= \sqrt{9+36} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2-1)^2+(5-(-3))^2} \\ &= \sqrt{1^2+8^2} \\ &= \sqrt{1+64} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-2))^2+(5-3)^2} \\ &= \sqrt{4^2+2^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Puisque on a $AB^2+BC^2=AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

2) En déduire la nature du parallélogramme ABCD.
Solution : Puisque le parallélogramme ABCD a un angle droit en B alors c'est un rectangle.

3) Déterminer les coordonnées du point E milieu de [AC].

Solution :

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5 \qquad y_E = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Le point E a pour coordonnées $(1{,}5;1)$.

4) Calculer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées tel que les points D, E et F soient alignés.

Solution : On note y l'ordonnée de F. On a donc :

$$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}5-1{,}5\\-1-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}3{,}5\\-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}0-5\\y-(-1)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-5\\y+1\end{pmatrix}$$

Puisque les points sont alignés, on a :

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{DF}\right) = 0 &\Leftrightarrow 3{,}5\times(y+1)-(-2)(-5) = 0\\ &\Leftrightarrow 3{,}5y+3{,}5-10 = 0\\ &\Leftrightarrow 3{,}5y = 6{,}5\\ &\Leftrightarrow y = \frac{13}{7}\end{aligned}$$

Les coordonnées de F sont donc $(0;\frac{13}{7})$.