Devoir surveillé n°8 – Correction

Vecteurs et coordonnées

EXERCICE 1 : (2pt) Dans le repère orthonormé (O,I,J) du plan, on considère les points :

$$C(1;2),\quad D(4;6),\quad P(x;4)$$

Déterminer la valeur de x pour que les points C, D et P soient alignés.

Solution :

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-1\\6-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}x-1\\4-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}x-1\\2\end{pmatrix}$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires alors on a :

$$\det(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CP}) = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)-2\times 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

EXERCICE 2 : (2pt) On considère un triangle XYZ et les points P et Q tels que :

$$\overrightarrow{XP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XY},\quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{YZ}$$

1) Montrer que $\overrightarrow{XQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XZ}$

   Solution :

   En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XQ} &= \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{XY} + \frac{1}{3}\overrightarrow{YZ}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{XZ}\end{aligned}$$

2) Que peut-on en conclure sur les points X, Z et Q.

   Solution :

   Les vecteurs $\overrightarrow{XQ}$ et $\overrightarrow{XZ}$ sont colinéaires et donc les points X,Z et Q sont alignés.

Fonctions de référence

EXERCICE 3 : (4pt)

1) Déterminer un encadrement de x^2 dans chacun des cas :

   a) $2 \le x \le 5$ b) $-7 \le x \le -3$ c) $-4 \le x \le 5$

   Solution :

   a) $4 \le x^2 \le 25$ b) $9 \le x^2 \le 49$ c) $0 \le x^2 \le 25$

2) Déterminer un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas :

a) $2 \leq x \leq 6$ b) $-5 \leq x \leq -2$

Solution :

a) $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On donnera les solutions à l'aide d'intervalles.

a) $x^2 \geq 16$ b) $\frac{1}{x} > 3$ c) $\sqrt{x} \leq \sqrt{2}$

Solution :

a) $\mathcal{S} =]-\infty;-4] \cup [4;+\infty[$ b) $\mathcal{S} = \left]0;\frac{1}{3}\right[$ c) $\mathcal{S} = [0;2]$

Équations

EXERCICE 4 : (3pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $3x + 7 = 2x - 4$.
2) $5 - (2x + 1) = 4x + 3$.
3) $6 + 3(2 - x) = x + 5$.

Solution :

1)

$$\begin{aligned} 3x + 7 = 2x - 4 &\Leftrightarrow 3x - 2x = -4 - 7 \\ &\Leftrightarrow x = -11 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-11\}$.

2)

$$\begin{aligned} 5 - (2x + 1) = 4x + 3 &\Leftrightarrow 5 - 2x - 1 = 4x + 3 \\ &\Leftrightarrow -2x + 4 = 4x + 3 \\ &\Leftrightarrow -2x - 4x = 3 - 4 \\ &\Leftrightarrow -6x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{\frac{1}{6}\}$.

3)

$$\begin{aligned} 6 + 3(2 - x) = x + 5 &\Leftrightarrow 6 + 6 - 3x = x + 5 \\ &\Leftrightarrow 12 - 3x = x + 5 \\ &\Leftrightarrow -3x - x = 5 - 12 \\ &\Leftrightarrow -4x = -7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{\frac{7}{4}\}$.

Exercice 5 : (2pt) Factoriser les expressions suivantes :

1) $A = (3x+2)^2 - 25$
2) $B = 4x^2 - 12x + 9$

Solution :

1) $A = (4x-5)^2 - 16$

$$\begin{aligned} A &= (3x+2)^2 - 25 \\ &= (3x+2)^2 - 5^2 \\ &= (3x+2-5)(3x+2+5) \\ &= (3x-3)(3x+7) \end{aligned}$$

2) $B = 4x^2 - 12x + 9$

$$\begin{aligned} B &= 4x^2 - 12x + 9 \\ &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2 \\ &= (2x-3)^2 \end{aligned}$$

Exercice 6 : (7pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+1)(x-3) = 0$.

Solution : On résout :

$$\begin{aligned} (2x+1)(x-3) = 0 &\Leftrightarrow 2x+1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = -1 \text{ ou } x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-3)^2 - (2x-3)(6x-1) = 0$.

Solution : On résout :

$$\begin{aligned} (2x-3)^2 - (2x-3)(6x-1) = 0 &\Leftrightarrow (2x-3)\left((2x-3)-(6x-1)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-3)(2x-3-6x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-3)(-4x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-3 = 0 \text{ ou } -4x-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 3 \text{ ou } -4x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

3) Résoudre l'équation $\dfrac{7x-3}{5-x} = 0$.

Solution : Pour que l'équation ait une solution, il faut avoir $5-x \neq 0$ et donc $x \neq 5$.
Il faut donc résoudre l'équation sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$.
Sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{7x-3}{5-x}=0 &\iff 7x-3=0\\ &\iff 7x=3\\ &\iff x=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{7}\right\}$

4) Résoudre l'équation $\dfrac{5x-4}{4x-3}=3$.

Solution : Pour que l'équation ait une solution, il faut avoir $4x-3\neq 0$ et donc $x\neq\dfrac{3}{4}$.

Il faut donc résoudre l'équation sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{4}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{5x-4}{4x-3}=3 &\iff 5x-4=3(4x-3)\\ &\iff 5x-4=12x-9\\ &\iff 5x-12x=-9+4\\ &\iff -7x=-5\\ &\iff x=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{7}\right\}$

5) Résoudre l'équation $\dfrac{(3x-5)(2-3x)}{x+7}=0$.

Solution :

Pour que l'équation ait une solution, il faut avoir $x+7\neq 0$ et donc $x\neq -7$.
Il faut donc résoudre l'équation sur $\mathbb{R}\backslash\{-7\}$.
Sur $\mathbb{R}\backslash\{-7\}$, on a :

$$\begin{aligned}(3x-5)(2-3x)=0 &\iff 3x-5=0 \text{ ou } 2-3x=0\\ &\iff 3x=5 \text{ ou } -3x=-2\\ &\iff x=\frac{5}{3} \text{ ou } x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right\}$