

Devoir surveillé n°9 – Correction

Nom :

Prénom :

EXERCICE 1 : (6pt)

1) Compléter en justifiant le tableau de signes ci-dessous:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x - 2$	-	0	+

2) Résoudre dans \mathbb{R} , à l'aide d'un tableau, l'inéquation suivante : $(7x + 1)(5 - 4x) \geq 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$7x + 1$	-	0	+	+
$5 - 4x$	+	+	0	-
$(7x + 1)(5 - 4x)$	-	0	+	0

Solution : D'après le tableau de signes, les solutions de l'inéquation $(7x + 1)(5 - 4x) \geq 0$ sont :

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{7}; \frac{5}{4} \right].$$

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Solution :

La fonction est définie lorsque le dénominateur est non nul :

$$2x + 3 \neq 0.$$

On résout :

$$2x \neq -3$$

$$x \neq -\frac{3}{2}.$$

Donc l'ensemble de définition est :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$$

b) Compléter en justifiant le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$+\infty$
$x+1$	-		0	+
$2x+3$	-	0	+	+
$\frac{x+1}{2x+3}$	+		0	+

c) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Solution :

D'après le tableau de signes, les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ sont :

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{3}{2}; -1 \right].$$

EXERCICE 2 : (4pt) Soit E un ensemble d'issues possibles à l'occasion d'une expérience aléatoire :

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Les sept événements élémentaires sont équiprobables.

On considère les événements

$$A = \{2; 3; 4\}, \quad B = \{3; 4; 5; 7\}, \quad C = \{1; 5\}.$$

1. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(A), \quad P(B), \quad P(C), \quad P(A \cap B), \quad P(A \cup C), \quad P(\bar{A}), \quad P(\bar{B}).$$

Solution : Les 7 issues élémentaires sont équiprobables, donc chaque issue a pour probabilité :

$$\frac{1}{7}$$

L'événement A contient 3 issues.

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

L'événement B contient 4 issues.

$$P(B) = \frac{4}{7}$$

L'événement C contient 2 issues.

$$P(C) = \frac{2}{7}$$

Les éléments communs à A et B sont :

$$A \cap B = \{3; 4\}$$

Cet événement contient 2 issues.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{7}$$

On réunit les éléments de A et C :

$$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Cet événement contient 5 issues.

$$P(A \cup C) = \frac{5}{7}$$

L'événement contraire de A est :

$$\bar{A} = \{1; 5; 6; 7\}$$

Il contient 4 issues.

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{7}$$

L'événement contraire de B est :

$$\bar{B} = \{1; 2; 6\}$$

Il contient 3 issues.

$$P(\bar{B}) = \frac{3}{7}$$

2. Calculer $p(A \cup B)$ de deux façons.

Solution :

Première méthode : dénombrement direct

On détermine :

$$A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 7\}$$

Cet événement contient 5 issues.

$$P(A \cup B) = \frac{5}{7}$$

Deuxième méthode : formule des probabilités

On utilise la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donc :

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{7}$$

EXERCICE 3 : (2pt) Compléter la loi de probabilité suivante (autrement dit : déterminer x) et en déduire la probabilité d'avoir une valeur inférieure ou égale à 3.

Valeur	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,25	0,2	0,1	x

Solution : La somme des probabilités d'une loi de probabilité est égale à 1.

On a donc :

$$0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,2 + 0,1 + x = 1$$

$$0,85 + x = 1$$

$$x = 1 - 0,85$$

$$x = 0,15$$

La loi de probabilité complétée est donc :

Valeur	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,25	0,2	0,1	0,15

Probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à 3

On calcule :

$$P(X \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(X \leq 3) = 0,1 + 0,2 + 0,25$$

$$P(X \leq 3) = 0,55$$

EXERCICE 4 : (4pt) On a une urne contenant 6 boules : 3 vertes, 2 jaunes et 1 rouge.

On notera :

V : « tirer une boule verte »,

J : « tirer une boule jaune »,

R : « tirer une boule rouge ».

On va tirer deux boules sans remise.

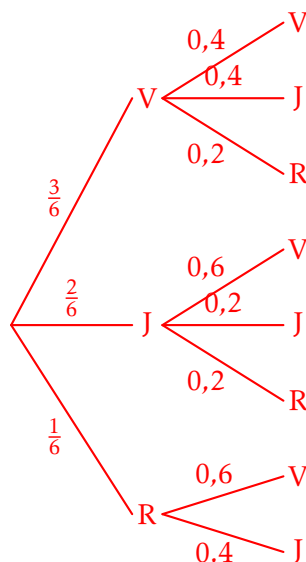
Soient les événements suivants :

A : « tirer deux boules vertes »,

B : « tirer deux boules de même couleur ».

1. Faire un arbre pondéré.

Solution :



2. Donner sous forme ensembliste Ω , A et B.

Solution :

L'univers est :

$$\Omega = \{VV, VJ, VR, JV, JJ, JR, RV, RJ\}$$

L'événement A est :

$$A = \{VV\}$$

L'événement B est :

$$B = \{VV, JJ\}$$

3. Donner les probabilités de A, B et de

C : « tirer deux boules de couleurs différentes ».

Solution :

$$P(A) = P(VV) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = P(VV) + P(JJ)$$

Or :

$$P(JJ) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Donc :

$$P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

On note :

C : « tirer deux boules de couleurs différentes »

L'événement C est le contraire de B, donc :

$$P(C) = 1 - P(B)$$

$$P(C) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

EXERCICE 5 : (4pt)

Dans la classe de 2^{nde}6, il y a 36 élèves dont 16 garçons, le reste sont des filles. Il y a 12 germanistes (dont 4 filles), le reste étudie l'italien.

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Filles	Garçons	Total
Allemand	4	8	12
Italien	16	8	24
Total	20	16	36

2) On sélectionne une personne au hasard et on note F et A respectivement les événements :

F : « la personne sélectionnée est une fille »

A : « la personne sélectionnée étudie l'allemand »

a) En utilisant le tableau, calculer les probabilités de A, F, $A \cap F$, \bar{F} et $A \cup F$.

Solution :

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(F) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

L'élève est une fille et étudie l'allemand.

$$P(A \cap F) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\bar{F}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

L'élève étudie l'allemand ou est une fille.

$$P(A \cup F) = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

b) Déterminer les deux dernières probabilités en utilisant les formules du cours.

Solution :

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F)$$

$$P(\bar{F}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$$

$$P(A \cup F) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup F) = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$