

Chapitre 3

Calcul littéral et équations

I) Simplifier une expression littérale

DÉFINITION :

Simplifier une expression littérale, c'est supprimer tous les symboles \times .

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possible.

EXEMPLE :

Simplifier et réduire $A = 7 \times x + 5 \times (-6) + x \times x - 3 \times x$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= 7 \times x + 5 \times (-6) + x \times x - 3 \times x \\ &= 7x - 30 + x^2 - 3x \\ &= x^2 + 4x - 30 \end{aligned}$$

Donc $A = x^2 + 4x - 30$.

REMARQUE :

L'opposé d'une somme est la somme des opposés. C'est à dire que pour enlever des parenthèses précédées par un signe moins, il faut changer le signe de tous les termes de la parenthèse.

EXEMPLE :

Simplifier et réduire $B = x^2 + 3x - 5 - (2x^2 - 5x + 3)$.

Solution :

$$\begin{aligned} B &= x^2 + 3x - 5 - (2x^2 - 5x + 3) \\ &= x^2 + 3x - 5 - 2x^2 + 5x - 3 \\ &= -x^2 + 8x - 8 \end{aligned}$$

Donc $B = -x^2 + 8x - 8$.

EXERCICE 1 :

~ Simplifier et réduire les expressions suivantes :

- ~ 1) $C = 3x + 5 + (-2x + 3)$
- ~ 2) $D = -(4a + 3b - 1) + (2a - 5b + 3)$
- ~ 3) $E = -3x^2 + 2x - 5 - (4x^2 + 2x + 5)$
- ~ 4) $F = -(5t + 1) - (-2t + 8)$

II) Développer

♥ DÉFINITION :

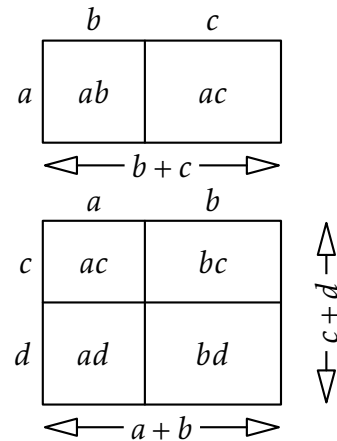
Développer c'est transformer un produit en somme.

Factoriser c'est transformer une somme en produit.

💡 PROPRIÉTÉ :

Pour tout réels a, b, c et d , on a :

$$\begin{aligned}
 &\text{développer} \\
 &\quad \longrightarrow \\
 &a(b+c) = ab+ac \\
 &(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd \\
 &(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\
 &(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \\
 &(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \\
 &\quad \longleftarrow \\
 &\text{factoriser}
 \end{aligned}$$



🔪 EXEMPLE :

Développer et réduire $G = 5x(2x+6)$ et $H = (3x-9)^2$

Solution :

$$\begin{aligned}
 G &= 5x(2x+6) \\
 &= 5x \times 2x + 5x \times 6 \\
 &= 10x^2 + 30x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= (3x-9)^2 \\
 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 9 + 9^2 \\
 &= 9x^2 - 54x + 81
 \end{aligned}$$

? EXERCICE 2 :

⚡ Développer les expressions suivantes :

⚡ 1) $I = 4(5x+6)$

⚡ 2) $J = -3(2x-9)$

⚡ 3) $K = 2x(7x-5)$

⚡ 4) $L = -5a(6-3a)$

⚡ 5) $M = (2x+3)(3x-4)$

⚡ 6) $N = (6x+2)^2$

⚡ 7) $O = (3x-4)^2$

⚡ 8) $P = (4x-7)(4x+7)$

? EXERCICE 3 :

⚡ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-3)(x+1) - 5$.

⚡ 1) Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

⚡ 2) Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = (x-1)^2 - 9$.

⚡ 3) En utilisant la forme la plus adaptée, calculer les images de 3, 0, 1 et de -1.

III) Équations

♥ DÉFINITIONS :

Une **équation à une inconnue** est une égalité dans laquelle un nombre est remplacé par un symbole, en général une lettre.

On dit qu'un nombre est une **solution** d'une équation si, lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre, l'égalité est vérifiée.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

💡 PROPRIÉTÉ :

- Une égalité reste vraie si on ajoute, ou si on soustrait, le même nombre à ses deux membres.

Si $a = b$, alors $a + c = b + c$ et $a - c = b - c$ avec a, b et c des réels.

- Une égalité reste vraie si on multiplie ou si on divise les deux membres par le même nombre non nul.

Si $a = b$, alors $ac = bc$ et $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, avec a, b et c des réels et $c \neq 0$.

§ EXEMPLE : Avec les flèches

Résoudre dans \mathbb{R} , $5x - 14 = 3x + 12$.

Solution : On résout :

$$\begin{array}{ccc} 5x - 14 = 3x + 12 & & \\ \swarrow -3x & & \searrow -3x \\ 2x - 14 = 12 & & \\ \swarrow +14 & & \searrow +14 \\ 2x = 26 & & \\ \swarrow :2 & & \searrow :2 \\ x = 13 & & \end{array}$$

Donc $\mathcal{S} = \{13\}$.

§ EXEMPLE : En mettant les étapes

Résoudre dans \mathbb{R} , $4x + 7 = 2x - 3$.

Solution : On résout :

$$\begin{aligned} 4x + 7 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 4x + 7 - 2x &= 2x - 3 - 2x \\ \Leftrightarrow 2x + 7 &= -3 \\ \Leftrightarrow 2x + 7 - 7 &= -3 - 7 \\ \Leftrightarrow 2x &= -10 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{2} &= \frac{-10}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -5 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-5\}$.

§ EXEMPLE : Méthode directe

Résoudre dans \mathbb{R} , $4x + 8 = 7x - 13$.

Solution : On résout :

$$\begin{aligned} 4x + 8 &= 7x - 13 &\Leftrightarrow 4x - 7x &= -13 - 8 \\ &&\Leftrightarrow -3x &= -21 \\ &&\Leftrightarrow x &= 7 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{7\}$.

? EXERCICE 4 :

⚡ Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

⚡ 1) $6x + 2 = 2x - 6$

⚡ 2) $-3x - 5 = x + 7$

⚡ 3) $4x - 1 = 7x - 8$

? EXERCICE 5 :

- 1) Répondre aux questions suivantes en justifiant.
- a) Votre ami vous dit que s'il multiplie le nombre de ses t-shirts par 5 et qu'il en ajoute 3, ça fera exactement 60. Comment lui expliquer que ce n'est pas possible?
 - b) À quel ensemble de nombres appartient la solution de $3x + 2 = -6$?
 - c) Est-ce qu'il est possible de trouver une solution de $x + 4 = -4x + 7$ dans \mathbb{D} ?
- 2) Résoudre $11x + 7 = 4x - 8$ dans \mathbb{N} . C'est-à-dire, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation qui sont dans \mathbb{N} .