

## Chapitre 16

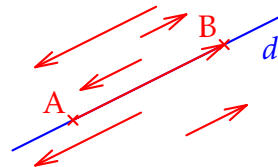
# Droites dans le plan

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### I) Équation cartésienne d'une droite

#### ♥ DÉFINITION :

On appelle **vecteur directeur** d'une droite  $d$  tout vecteur non nul dont la direction est celle de  $d$ .



#### 📌 REMARQUES :

- Une droite a une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires deux à deux.
- Si A et B sont deux points distincts de la droite  $d$ , alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de  $d$ .

#### 📌 EXEMPLE :

Soient  $A(-2;4)$  et  $B(6;2)$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

En effet les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires puisque leur déterminant est nul.

$$\det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) = 8 \times 1 - (-2) \times (-4) = 8 - 8 = 0$$

#### 💡 PROPRIÉTÉ :

Soit  $d$  une droite dans un repère du plan. Alors  $d$  admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ . On dit que c'est une **équation cartésienne** de  $d$ .

#### 📌 REMARQUES :

- Cela veut dire qu'un point  $M(x; y)$  appartient à la droite  $d$  si, et seulement si,  $ax + by + c = 0$ .
- Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$ .
- Une droite a une infinité d'équations cartésiennes.  
Par exemple  $2ax + 2by + 2c = 0$  est aussi une équation cartésienne de  $d$ .

#### 📌 EXEMPLES :

- Le point  $M(1;1)$  appartient à la droite  $d$  d'équation  $2x - 3y + 1 = 0$ .

En effet  $2 \times 1 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$ .

- L'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $2x - 3y + 1 = 0$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

On peut aussi prendre  $-2 \times (2x - 3y + 1) = 0$ , c'est-à-dire  $-4x + 6y = 0$ , comme équation cartésienne de  $d$ .

 **PROPRIÉTÉ :**

Réciproquement, si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels tels que  $(a; b) \neq (0; 0)$ , alors l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  telles que  $ax + by + c = 0$  est une droite.

 **EXERCICE 1 :**

Déterminer un vecteur directeur des droites ci-dessous dont on donne une équation :

- 1)  $5x + 6y + 1 = 0$
- 2)  $3x + 5 = 0$
- 3)  $4y + 7 = 0$

 **EXEMPLE :**

Représenter la droite dont une équation cartésienne est  $-x + 2y - 3 = 0$  dans un repère orthonormé.

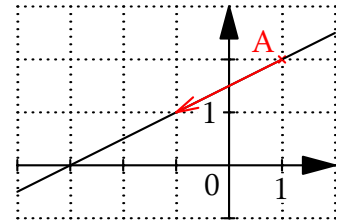
**Méthode 1**

- On cherche les coordonnées d'un point  $A$  appartenant à  $d$ .

Si  $x = 1$  alors on trouve :

$$-1 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

Le point  $A(1; 2)$  appartient à la droite  $d$ .



- $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$ .

- Donc à partir du point  $A$  on se décale de 2 vers la gauche et on descend de 1 pour obtenir un nouveau point de la droite.

**Méthode 2**

- On cherche les coordonnées de deux points  $A$  et  $B$  appartenant à  $d$ .

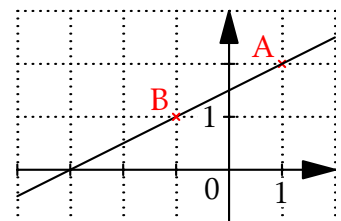
Si  $x = 1$  alors on trouve :

$$-1 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

Si  $x = -1$  alors on trouve :

$$-(-1) + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

- On place les points  $A(1; 2)$  et  $B(-1; 1)$ , et on trace la droite.



 **EXERCICE 2 :**

Tracer les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations cartésiennes respectives :

$3x - 4y + 6 = 0$  et  $5x + 2y + 9 = 0$

### **EXEMPLE :**

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point  $A(-2;3)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

#### **Méthode 1**

- Comme  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de la droite  $d$  alors son équation cartésienne est de la forme :  $x + 2y + c = 0$ .
- Comme la droite passe par A alors les coordonnées de A vérifient l'équation :

$$-2 + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

Donc  $x + 2y - 4 = 0$  est une équation cartésienne de la droite  $d$ .

#### **Méthode 2**

- Soit  $M(x;y)$  un point de  $d$ .

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires donc on a :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 &\Leftrightarrow (x+2) \times 1 - (-2) \times (y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2+2y-6=0 \\ &\Leftrightarrow x+2y-4=0 \end{aligned}$$

### **EXERCICE 3 :**

- 1) Soient  $A(2;-3)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$  dans un repère.

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

- 2) Soit  $A(-5;-6)$  et  $B(1;2)$ . Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

## II) Équation réduite et pente d'une droite

### **PROPRIÉTÉ :**

Toute droite a une équation soit de la forme  $y = mx + p$  soit de la forme  $x = c$ . Cette équation est appelée **l'équation réduite** de la droite.

### **REMARQUE :**

Les droites sont partagées en deux groupes, celles parallèles à l'axe des ordonnées ont une équation de la forme  $x = c$ , les autres ont une équation de la forme  $y = mx + p$ . Dans ce dernier cas,  $m$  est le **coefficient directeur** ou **pente** et  $p$  **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

**💡 PROPRIÉTÉ :**

Soient  $A(x_A; y_A)$ , et  $B(x_B; y_B)$  deux points distincts tels que  $x_A \neq x_B$ . Le coefficient directeur, ou pente,  $m$  de la droite  $(AB)$  est :

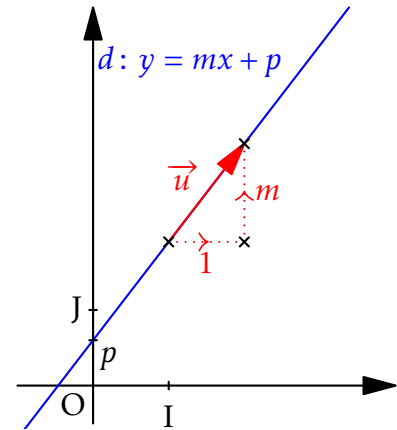
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$$

**💡 PROPRIÉTÉ :**

Dans le plan muni d'un repère, soit  $d$  la droite d'équation  $y = mx + p$ . Alors le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$ .

**📌 REMARQUE :**

Le vecteur  $\vec{u}$  peut-être remplacé par n'importe quel autre vecteur non nul qui lui est colinéaire.



**? EXERCICE 4 :**

- 1) Déterminer la pente de la droite  $d_1$  passant par les points  $A(-4; 2)$  et  $B(2; -3)$ .
- 2) Déterminer la pente de la droite  $d_2$  dont une équation cartésienne est  $6x - 4y + 2 = 0$ .
- 3) Déterminer l'équation réduite de la droite  $d_3$  passant par le point  $A(2; -3)$  et de pente  $-4$ .
- 4) Déterminer l'équation réduite de la droite  $d_4$  passant par les point  $A(1; 4)$  et  $B(3; -2)$ .
- 5) Déterminer l'équation réduite de la droite  $d_5$  passant par les point  $A(-8; 3)$  et  $B(-8; 5)$ .

**? EXERCICE 5 :**

Tracer les droites  $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$  d'équations réduites respectives :

$$y = 2x ; y = -3x + 7 ; y = \frac{4}{3}x - 2 \text{ et } x = 3$$

### III) Positions relatives de deux droites

**💡 PROPRIÉTÉ :**

Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

**? EXERCICE 6 :**

- 1) Déterminer l'équation réduite de la droite  $d_2$  parallèle à la droite  $d_1$  d'équation  $y = -x + 2022$  et passant par le point  $M(20; 3)$ .
- 2) On considère les trois points du plan  $A(2; -5)$ ,  $B(-2; 1)$  et  $C(3; 4)$ . Déterminer une équation de la droite  $d$  parallèle à  $(AB)$  et passant par le point  $C$ .
- 3) On donne  $A(-1; 2)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(0; 4)$  et  $D(6; 6)$ . Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont-elles parallèles?

 **PROPRIÉTÉ :**

Dans le plan, lorsque deux droites distinctes  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles, elles ont un unique point commun. On dit que  $d_1$  et  $d_2$  sont deux droites **sécantes**.

 **EXERCICE 7 :**

Dans un repère orthonormé  $(O;I,J)$ , on considère les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations respectives  $x + y = 3$  et  $-4x + 2y = -6$ .

- 1) Construire  $d_1$  et  $d_2$ .
- 2) Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

## IV) Systèmes d'équations

 **DÉFINITION :**

Résoudre un **système d'équations**, c'est chercher les solutions communes à chacune des équations.

 **EXEMPLE :**

- **Méthode par substitution :** l'idée est d'isoler une inconnue dans une des équations et de la substituer dans l'autre.

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ -12 - 4y + 2y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ y = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ -4x + 2y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ -12 + 6y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 1 \\ y = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ -4(3 + y) + 2y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ 6y = 6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

La solution du système est  $(2; 1)$ .

- **Méthode par combinaisons :** l'idée est de supprimer une inconnue en remplaçant une des équations par une combinaison des deux équations.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad L_1 \leftarrow \frac{L_1}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = 1 \end{array} \right. \\ L_1 \leftarrow 4L_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x + 4y = 12 \\ -4x + 2y = -6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 1 = 3 \\ y = 1 \end{array} \right. \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x + 4y = 12 \\ 6y = 6 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

La solution du système est  $(2; 1)$ .