Chapitre 1

Ensembles de nombres

I) Ensembles de nombres

DÉFINITION :

On distingue plusieurs types de nombres :

- **L'ensemble des entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, contient tous les nombres entiers positifs :

$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;\ldots\}$$

- **L'ensemble des entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, contient tous les nombres entiers positifs ou négatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$$

- **L'ensemble des nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, contient les nombres de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec a entier et p entier naturel.
  Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
  Les nombres 3 ; 2,6 ; $-5{,}7$ et $\frac{1}{4}$ sont décimaux. Le nombre $\frac{1}{3}$ ne l'est pas.
- **L'ensemble des nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, contient tous les nombres pouvant s'écrire comme un quotient $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs, et b non nul.
  Les nombres $\frac{1}{3}$; 4 et $-4{,}8$ sont des rationnels. Le nombre $\sqrt{2}$ ne l'est pas.
- **L'ensemble des nombres réels**, noté $\mathbb{R}$, contient tous les nombres que nous utiliserons en seconde. Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite des réels**.

DÉFINITION :

On note $A \subset B$ **l'inclusion** de l'ensemble A dans l'ensemble B, lorsque tous les éléments de A sont aussi dans B.

PROPRIÉTÉ :

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

EXEMPLE :

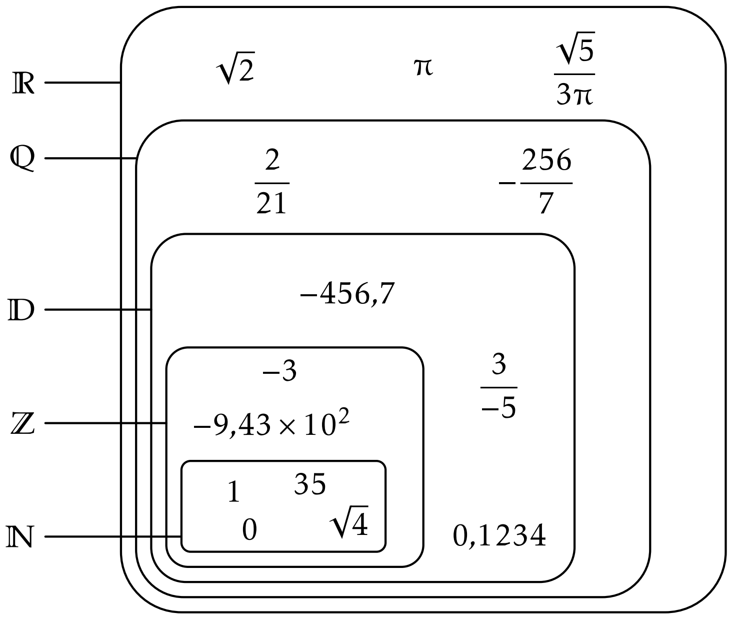
Placer dans le diagramme suivant le nom des ensembles et les nombres suivants :

0 ; $0{,}1234$; 1 ; -3 ; 35

$-456{,}7$; $\frac{2}{21}$; $-\frac{256}{7}$; $\frac{3}{-5}$

$-9{,}43 \times 10^2$; π ; $\sqrt{2}$

$\sqrt{4}$; $\frac{\sqrt{5}}{3\pi}$



Définition :
Les nombres de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ sont appelés des **irrationnels**

II) Puissances

II.1) Exposant entier positif

Définition :
Soient a un réel et n un entier positif non nul.
On note a^n le nombre a **exposant** n (ou a **puissance** n) qui vaut : $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.
C'est une **puissance** de a et on dit que n est **l'exposant**.

Exemples :
Donner l'écriture décimale de 5^3 et de $(-3)^4$.
- $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = \boxed{125}$
- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = \boxed{81}$

Remarque :
Si $n = 1$, on obtient $a^1 = a$. Si $a \neq 0$, alors $a^0 = 1$.

Exemple :
$6^1 = 6$ et $(-7)^0 = 1$

II.2) Exposant entier négatif

Définition :
Soient a un réel non nul et n un entier positif non nul.
On note a^{-n} **l'inverse** de a^n qui vaut : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemples :
Donner l'écriture fractionnaire de 5^{-3} et de $(-4)^{-3}$.
- $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{5 \times 5 \times 5} = \boxed{\dfrac{1}{125}}$
- $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = \dfrac{1}{(-4) \times (-4) \times (-4)} = \dfrac{1}{-64} = \boxed{-\dfrac{1}{64}}$

Remarque :
Si a est non nul, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. C'est l'inverse de a.

Exemples :
$12^{-1} = \dfrac{1}{12}$ et $(-9)^{-1} = -\dfrac{1}{9}$

II.3) Calcul dans les exposants

Règles :

Soient a un réel non nul et n et p deux entiers relatifs.

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n\times p}$

Exemples :

Écrire les nombres suivants sous la forme a^n.

- $3^4 \times 3^3 = 3^{4+3} = \boxed{3^7}$
- $(-4)^2 \times (-4)^{-5} = (-4)^{2-5} = \boxed{(-4)^{-3}}$
- $\dfrac{8^4}{8^5} = 8^{4-5} = \boxed{8^{-1}}$
- $\left((-5)^4\right)^6 = (-5)^{4\times 6} = \boxed{(-5)^{24}}$
- $\left(6^3\right)^{-2} = 6^{3\times(-2)} = \boxed{6^{-6}}$

Propriétés :

Soient a et b deux réels non nuls et n un entier relatif.

- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemples :

Enlever les parenthèses dans les expressions suivantes :

- $(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = \boxed{9x^2}$
- $(-5x)^3 = (-5)^3 \times x^3 = \boxed{-125x^3}$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2} = \boxed{\dfrac{9}{16}}$

Exercice 1 :

Calculer $A = \dfrac{16 \times 10^{-1} \times 2}{(10^3)^2 \times 10^{-8} \times 80}$.

Remarque :

Il n'existe aucune règle pour l'addition ou la soustraction de puissances.

$$3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36 \quad \text{et} \quad 3^5 = 243$$

II.4) Écriture scientifique

Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^n$ avec a un nombre avec **un seul chiffre non nul avant la virgule**.

Exemples :

- L'écriture scientifique de 3452000 est $3{,}452 \times 10^6$.
- L'écriture scientifique de 0,0023 est $2{,}3 \times 10^{-3}$.
- Les nombres $65{,}1234 \times 10^5$ et $0{,}82 \times 10^8$ ne sont pas des écritures scientifiques.

Exercice 2 :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

a) 165,3
b) −4000,1
c) 0,0046
d) −0,000901
e) 590×10^{36}
f) 9731×10^{-21}
g) $0{,}0031 \times 10^{78}$
h) $0{,}0684 \times 10^{-13}$

III) Racines carrées

Définition :

Pour tout réel positif a, la **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif b tel que $b^2 = a$.

Propriété :

Soient a et b deux nombres positifs. Alors :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration :

Pour le produit :

- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$
- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$

Donc $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$ et donc $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. ■

Remarque :

Attention, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Contre-exemple : $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
Par contre, si $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration :

On a :

- $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$
- $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

Donc $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ car $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$.
On en déduit que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. ■

EXEMPLE :

On peut simplifier l'écriture des racines carrées :

a) $\sqrt{50}\times\sqrt{2}=\sqrt{50\times 2}=\sqrt{100}=10$

b) $\sqrt{\dfrac{7}{81}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{81}}=\dfrac{\sqrt{7}}{9}$

c) $\sqrt{98}=\sqrt{49\times 2}=\sqrt{49}\times\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{75}{3}}=\sqrt{25}=5$

EXERCICE 3 :

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b deux entiers et b le plus petit possible.

a) $\sqrt{8}=$

b) $\sqrt{125}=$

c) $\sqrt{108}=$

d) $\sqrt{294}=$

e) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=$

f) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{6}}=$

PROPRIÉTÉ :

Pour tout nombre $a>0$, $\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

Pour tout nombre $a<0$, $\sqrt{a^2}=-a$.

IV) Multiples, diviseurs, nombres premiers

IV.1) Diviseurs et multiples

DÉFINITION :

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b\neq 0$. On dit que b est un **diviseur** de a si et seulement s'il existe q appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $a=b\times q$.

On dit aussi que a est un **multiple** de b, ou que a est **divisible** par b ou que b **divise** a.

EXEMPLES :

- $183=3\times 61$ donc 3 et 61 sont des diviseurs de 183.
  183 est un multiple de 3 et 61.
- $684=-9\times(-76)$ donc -9 et -76 sont des diviseurs de 684.
- $-609=-3\times 7\times 29$, donc -3, 7 et 29 sont des diviseurs de -609.

EXERCICE 4 :

Compléter chaque phrase :

1) $144=24\times 6$ donc 24 est un .... de 144.

2) $\dfrac{84}{7}=12$ donc 84 est .... par 7 et par ......

3) $295=59\times 5$ donc 295 est un .... de 59 et de ......

Exercice 5 :

Compléter les égalités suivantes :

1) -132 est un multiple de 11, donc $\dots\dots\dots = \dots\dots \times k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2) 18 divise -270, donc $\dots\dots = \dots\dots\dots \times k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3) 32 058 est divisible par 9, donc $\dots\dots\dots\dots = \dots\dots \times k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
4) 29 est un diviseur de 406, donc $\dots\dots\dots = \dots\dots \times k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété : *Critères de divisibilité*

Un nombre est divisible :

- par 2 si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- par 5 si le chiffre des unités est 0, ou 5.
- par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Démonstration :

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On va effectuer une **démonstration par l'absurde** en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.
Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Alors il s'écrit sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. ∎

Exemple :

Compléter les phrases suivantes :

1) $15 = 3 \times \dots$ donc 15 est un $\dots\dots\dots$ de 3.
2) $27 = 3 \times \dots$ donc 27 est un $\dots\dots\dots$ de 3.
3) $15 + 27 = 3 \times \dots + 3 \times \dots = 3 \times (\dots + \dots)$ donc $15 + 27$ est un $\dots\dots\dots$ de 3.

Propriété :

La somme de deux multiples de a, entier non nul, est un multiple de a.

Démonstration :

Démontrons le résultats pour le cas $a = 3$.
Soit b et c deux multiples de 3.
Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3 \times k_1$.
Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3 \times k_2$.
Alors : $b + c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k$, où $k = k_1 + k_2$.
k est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = 3k$ avec k entier.
$b + c$ est donc un multiple de 3.

∎

Définition :
Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Propriété :
Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété :
Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :
Soit a un nombre impair.
Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.
Alors $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$.
Donc a^2 est impair. ■

Propriété :
Soit n un entier, $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait, soit un irrationnel.

Démonstration :
Démontrons l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.
Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$. Donc $a^2 = 2b^2$.
On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.
En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair.
Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Comme, $a^2 = 2b^2$ on a $(2k)^2 = 2b^2$ soit $4k^2 = 2b^2$ soit $b^2 = 2k^2$.
On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.
Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément.
On aboutit à une absurdité.
Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel. ■

IV.2) Nombres premiers

Définition :
Un **nombre premier** est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple :
2, 3, 5, 7 et 11 sont des nombres premiers. Par contre 1 n'est pas premier puisqu'il n'a qu'un seul diviseur. 0 n'est pas premier car il a une infinité de diviseurs.
Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4. Il n'est donc pas premier.

DÉFINITION :

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

REMARQUE :

Il ne faut pas confondre “a et b sont premiers” et “a et b sont premiers entre eux”.
Contre-exemple : 4 et 9. Ils ne sont pas premiers mais premiers entre eux.

PROPRIÉTÉ :

Si n est nombre entier qui n’est pas premier, alors son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

EXEMPLES :

- 39 n’est pas un nombre premier. $\sqrt{39} \approx 6{,}24$ donc son plus petit diviseur premier différent de 1 est inférieur ou égal à 6 soit 2, 3 ou 5.
  Il s’agit du nombre 3 car $39 = 3 \times 13$.
- 57 est un nombre premier en effet :
  $\sqrt{57} \approx 7{,}55$ donc son plus petit diviseur premier différent de 1 est inférieur ou égal à 7 soit 2, 3, 5 ou 7. Or 57 n’est pas divisible par 2, 3 ou 5 d’après les critères de divisibilité et $\dfrac{57}{7} \approx 8{,}1$.
  On en déduit alors que 57 est un nombre premier.

PROPRIÉTÉ :

Tout entier naturel non premier et supérieur à 2 admet une décomposition en produit de nombres premiers. Certains nombres peuvent apparaitre plusieurs fois. En classant ces nombres par ordre croissant, cette décomposition est unique.

EXEMPLE :

On veut décomposer 120 et 252. On fait un tableau des diviseurs premiers :

Nombre	Diviseurs
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Nombre	Diviseur
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

On peut utiliser cette décomposition pour simplifier les fractions :

$$\frac{120}{252} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$\dfrac{10}{21}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur commun de 10 et 21 est 1. Autrement dit 10 et 21 sont premiers entre eux.