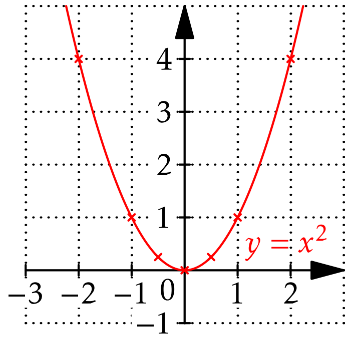
Chapitre 12

Fonctions de référence

I) Fonction carré

DÉFINITION :
La fonction qui à x associe x^2, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée la **fonction carré**.
On appelle sa courbe représentative **une parabole**.



x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
x^2	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4

REMARQUE :
- La courbe représentative de f est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses, ce qui signifie que pour tout réel x, $f(x) \geq 0$.
- Puisque $(-x)^2 = x^2$, la fonction est paire et donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Tout nombre réel strictement positif possède deux antécédents, ce qui signifie que pour tout réel $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

EXERCICE 1 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = 7$ c) $x^2 = -7$ d) $x^2 = 0$

PROPRIÉTÉ :
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} & 0 \leq a < b \\ \Rightarrow\ & a+b > 0 \text{ et } a-b < 0 \\ \Rightarrow\ & (a+b)(a-b) < 0 \\ \Rightarrow\ & a^2 - b^2 < 0 \\ \Rightarrow\ & a^2 < b^2 \end{aligned}$$

f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} & a < b \leq 0 \\ \Rightarrow\ & a+b < 0 \text{ et } a-b < 0 \\ \Rightarrow\ & (a+b)(a-b) > 0 \\ \Rightarrow\ & a^2 - b^2 > 0 \\ \Rightarrow\ & a^2 > b^2 \end{aligned}$$

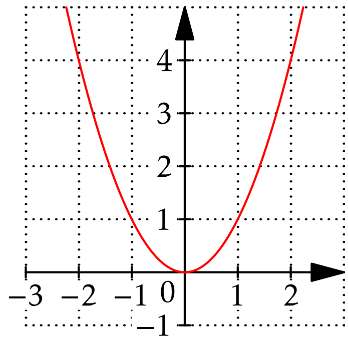
f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

■

Exercice 2 :

Dans chacun des cas, donner un encadrement de x^2 :

a) si $0 \leq x \leq 2$ b) si $-2 \leq x \leq -1$ c) si $-2 \leq x \leq 1$



Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

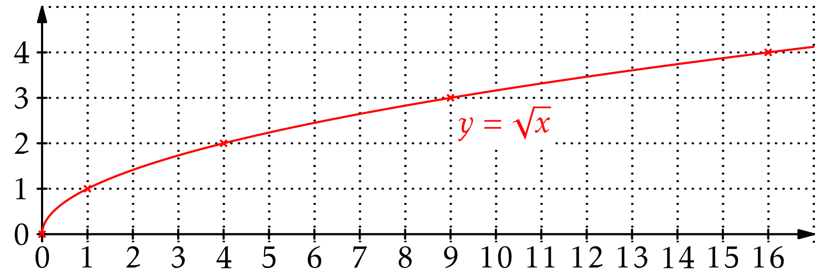
a) $x^2 \leq 4$ b) $x^2 \geq 3$ c) $x^2 < -2$

II) Fonction racine carrée

Définition :

La fonction qui à x associe $\sqrt{x}$ est appelée la **fonction racine carrée**.
Elle est définie sur $[0;+\infty[$.

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4



Propriété :

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

Démonstration :

Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. On a :

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

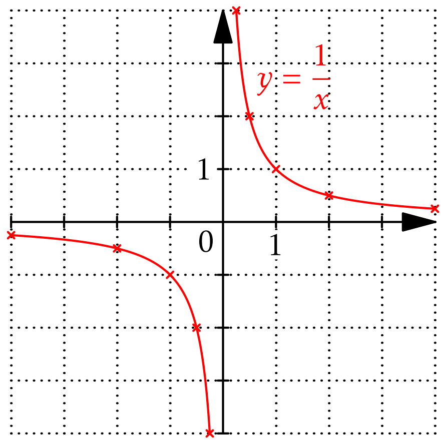
Par définition, on a $b - a > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$. On en déduit que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.
La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$. ■

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x} > 2$ b) $\sqrt{x} \leq \sqrt{5}$ c) $\sqrt{x} < -2$

III) Fonction inverse



DÉFINITION :

La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) qui à x associe $\frac{1}{x}$ est appelée la **fonction inverse**. On dit que sa courbe représentative est une **hyperbole**.

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0{,}5$	$0{,}25$

REMARQUE :

- Puisque $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}$, la fonction est impaire et donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Le nombre 0 n'a pas d'image car la fonction n'est pas définie en 0. Ce qui se traduit par une "coupure" de la courbe représentative de f.

PROPRIÉTÉ :

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

DÉMONSTRATION :

On remarque :

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{ab} > 0$$

Soient a et b, deux réels de même signe et tels que $a < b$.

Alors $ab > 0$ et $b - a > 0$.

D'où $\frac{b-a}{ab} > 0$.

Donc $f(a) > f(b)$. ■

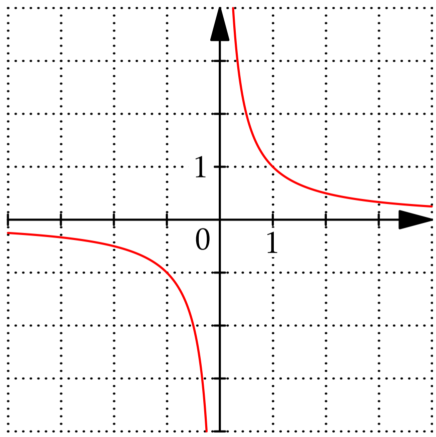
REMARQUE :

La fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ à cause de l'ensemble de définition.

Exercice 5 :

Dans chacun des cas, donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$:

a) si $2 \leq x \leq 3$ b) si $-2 \leq x \leq -1$

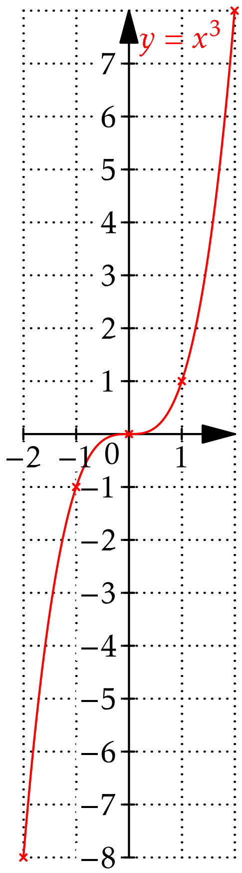


Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x} \geq 1$ b) $\dfrac{1}{x} < -2$

IV) Fonction cube



Définition :
La fonction qui à x associe x^3 est appelée la **fonction cube**.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	2
x^3	-8	-1	0	1	8

Propriété :
La fonction cube est impaire :

$$(-x)^3 = -x^3$$

Propriété :
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
x^3	