Chapitre 16

Signe d'une fonction

I) Signe d'une fonction

DÉFINITION :

On appelle **étude du signe d'une fonction** le fait de déterminer les intervalles sur lesquels elle est strictement positive, strictement négative ou nulle.

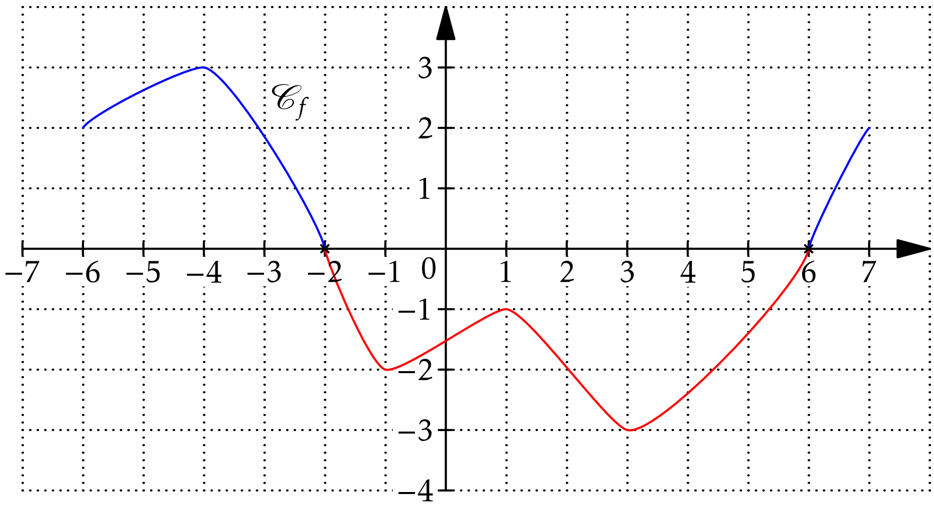
PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation dans un repère. Alors :

- la fonction f est strictement positive sur l'intervalle I si tous les points $(x; f(x))$ sont au dessus de l'axe des abscisses pour tout $x \in \mathrm{I}$;
- la fonction f est strictement négative sur l'intervalle I si tous les points $(x; f(x))$ sont en dessous de l'axe des abscisses pour tout $x \in \mathrm{I}$

EXEMPLE :

On considère la fonction f dont la représentation est donnée ci-contre.

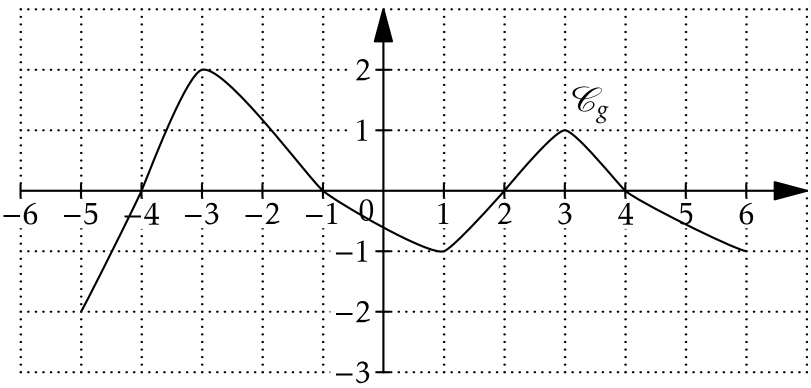


Par lecture graphique on trouve que :

- La fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[-6;-2[$ ainsi que sur $]6;7]$.
- Elle est strictement négative sur l'intervalle $]-2;6[$.
- Elle s'annule en -2 et en 6.

EXERCICE 1 :

On considère la fonction g dont la représentation est donnée ci-contre. Étudier le signe de cette fonction.



[Ex 1, 2 page 248]

Remarque :
On résume généralement l'étude du signe d'une fonction à l'aide d'un **tableau de signes**. Sur la première ligne, on indique les abscisses aux extrémités de l'ensemble de définition ou celles pour lesquelles elle s'annule. Sur la deuxième ligne, on indique le signe de la fonction ou si elle s'annule.

Exemple :
Le tableau de signes ci-contre correspond à la fonction f du premier exemple.

x	-6		-2		6		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2 :
Dresser le tableau de signes de la fonction g de l'exercice 1.

[Ex 19, 20, 21, 22 page 253]

II) Inéquation et tableau de signes

Exercice 3 :
On donne les tableaux de signes suivants :

x	-9		-3		0		3		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		3		27		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Résoudre les inéquations suivantes :
1) $f(x) \geq 0$
2) $g(x) < 0$

[Ex 42, 43 page 254]

Exemple :
Déterminer le signe de l'expression $2x+1$.
Solution : On résout l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} & 2x+1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x \geq -1 \\ \Leftrightarrow\ & x \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On remplit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

Exercice 4 :
Dresser le tableau de signes des expressions ci-dessous.
1) $x+4$
2) $x-4$
3) $-x+3$
4) $-x-3$
5) $4x+2$
6) $2x-8$
7) $-2x+5$
8) $-3x-1$

Propriété :
Dans le tableau de signes d'une fonction affine non constante, le signe du coefficient directeur se trouve toujours à droite du 0.

[Ex 23, 24, 25 page 253]

III) Inéquations produits et quotients

Propriété :
- Le produit ou le quotient de deux réels de même signe est positif.
- Le produit ou le quotient de deux réels de signes contraires est négatif.

Exemple :
Étudier le signe de $(x+5)(-x+3)$.
Solution :
On résout $x+5 \geq 0$ et $-x+3 \geq 0$.

$$x+5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -5 \qquad \text{et} \qquad -x+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$$

On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x+5)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :
- $(x+5)(-x+3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-5;3]$
- $(x+5)(-x+3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;-5] \cup [3;+\infty[$

[Ex résolu 3 page 250 ; Ex 6, 7 page 250 ; Ex 51, 54 page 255]

Exercice 5 :
Étudier le signe des expressions suivantes :
1) $(7-x)(3x+6)$
2) $(3x-2)(x+4)$

Exemple :
Étudier le signe de $\dfrac{x+5}{-x+3}$.
Solution :
On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{x+5}{-x+3}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Conclusion :
- $\dfrac{x+5}{-x+3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-5;3[$

- $\dfrac{x+5}{-x+3} \leq 0 \iff x \in]-\infty;-5] \cup]3;+\infty[$

Exercice 6 :

Résoudre $\dfrac{-x+5}{3x-7} < 0$.

[Ex 5, 7, 9 page 250 ; Ex 52, 53 page 255]
[Ex 55, 56 page 255]

Remarques :

- Résoudre $f(x) \geq k$, avec $k \in \mathbb{R}$, revient à résoudre $f(x) - k \geq 0$.
- Résoudre $f(x) \geq g(x)$ revient à résoudre $f(x) - g(x) \geq 0$.

Exercice 7 :

On considère $f(x) = (x-5)(x+3)$ et $g(x) = (x-5)(6-x)$, définies sur $\mathbb{R}$.
Résoudre algébriquement $f(x) \leq g(x)$.

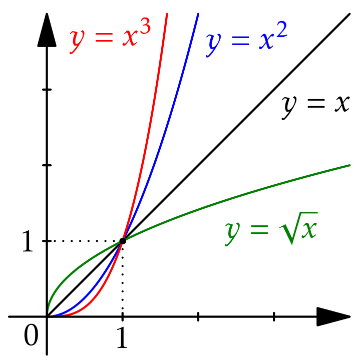
IV) Positions relatives de courbes usuelles

Remarque :

Lorsqu'on résout $f(x) \geq g(x)$, on détermine sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de $\mathscr{C}_g$. On dit qu'on étudie leurs **positions relatives**.

Propriété :

- Si $0 < x < 1$ alors $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$
- Si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$
- $1^3 = 1^2 = \sqrt{1} = 1$
- $0^3 = 0^2 = \sqrt{0} = 0$



On remarque que les courbes de la fonction carrée et de la fonction racine carrée sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration :

- On étudie le signe de $x^3 - x^2$.

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

On a :

x	0		1		$+\infty$
x^2	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^2(x-1)$	0	$-$	0	$+$	

Donc si $0 < x < 1$, alors $x^3 < x^2$ et si $x > 1$, alors $x^3 > x^2$.

- On étudie le signe de $x^2 - x$.

$$x^2 - x = x(x-1)$$

On a :

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$	0	$-$	0	$+$	

Donc si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$ et si $x > 1$, alors $x^2 > x$.

■

[Ex 74 page 256]
[Ex 79, 80, 84 page 258 ; Ex 88 page 259]