Chapitre 6

Fonctions

I) Généralités

DÉFINITIONS :

On définit une **fonction** sur un ensemble de nombres $\mathscr{D}$ en associant à chaque nombre x de $\mathscr{D}$ un unique nombre y.

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

- $\mathscr{D}$ est **l'ensemble de définition** de f. C'est l'ensemble des nombres auxquels on peut appliquer f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.
- y est **l'image** de x par f. On le note $f(x)$, qui se lit "f de x".
- x est **un antécédent** de y.

EXEMPLE :

Soit f la fonction qui associe à un numéro de sécurité sociale l'âge de la personne correspondante.

L'ensemble de définition de la fonction est l'ensemble des numéros de sécurité sociale.

Chaque numéro correspond à un unique âge. Il y a une unique image pour chaque antécédent.

Plusieurs numéros peuvent correspondre au même âge. Il peut y avoir plusieurs antécédents pour une image donnée.

EXERCICE 1 :

On considère une fonction h telle que $h(5) = 8$. Compléter les phrases suivantes :

- ... est l'image de ... par h.
- ... est un antécédent de ... par h.
- ... a pour image ... par h.
- ... a pour antécédent ... par h.

II) Représentation graphique

DÉFINITION :

La **courbe représentative** d'une fonction f, définie sur $\mathscr{D}$ dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ tels que :

- $x \in \mathscr{D}$
- y est l'image de x par f

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentée par ces points. On dit que $y = f(x)$ est l'équation de $\mathscr{C}_f$.

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on peut construire un tableau de valeurs, placer les points dans le repère puis les relier.

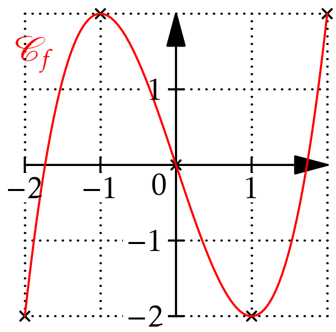
Exemple :

Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ sur l'intervalle $[-2;2]$.

Solution : On fait un tableau de valeurs. Plus on prend de valeurs, plus le tracé sera précis.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

On place les points dans le repère et on les relie.



Définition :

On dit qu'une fonction f est **paire** si pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$.

On dit qu'une fonction f est **impaire** si pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

III) Recherche d'images et d'antécédents

III.1) Graphiquement

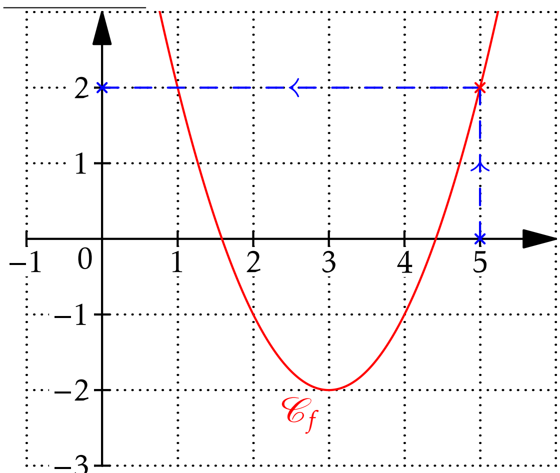
Exemple :

C_f est la courbe représentative d'une fonction f.

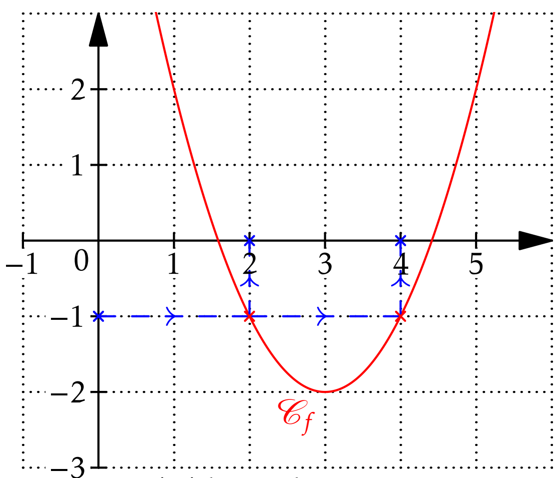
1) Déterminer graphiquement l'image de 5 par f.

2) Déterminer graphiquement les antécédents de (-1) par f.

Solution :



L'image de 5 est 2.



Les antécédents de -1 sont 2 et 4.

Remarque :

Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient à trouver les éventuels antécédents de k par f.

III.2) Par un tableau de valeur

Exercice 2 :

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $[0;4]$ et dont on connait le tableau de valeur ci-dessous :

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	3	2	3	5	1

1) a) Quelle est l'image de 3 ?
   b) Donner un antécédent de 2.
2) Vrai ou faux ?
   a) 3 a deux images.
   b) 3 a au moins deux antécédents.
   c) 1 est un antécédent de 4 par g.
   d) 2 est l'image de 1 par g.

III.3) Algébriquement

Exercice 3 :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - 3$.

1) Quelle est l'image de 1 par h ?
2) Quels sont les antécédents de 1 par h ?
3) Quels sont les antécédents de -10 par h ?

IV) Résolution graphique d'inéquations

Propriété :

Soit f une fonction définie sur I et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Les solutions de $f(x) \geq k$ (resp. $f(x) \leq k$) sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus (resp. en dessous) ou sur la droite d'équation $y = k$.

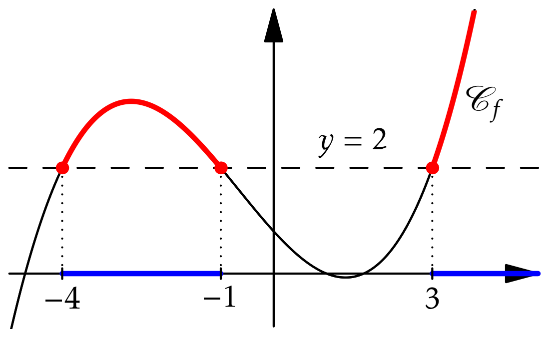
Exemple :

On considère la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f(x)$. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.

Solution :

La courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y = 2$ pour $x \in [-4;-1]$ et pour $x \in [3;+\infty[$.

Les solutions de $f(x) \geq 2$ sont donc $[-4;-1] \cup [3;+\infty[$.



Remarque :

Pour $f(x) > k$ ou $f(x) < k$, on ne prend pas les abscisses des points d'intersection entre la courbe et la droite.

Propriété :

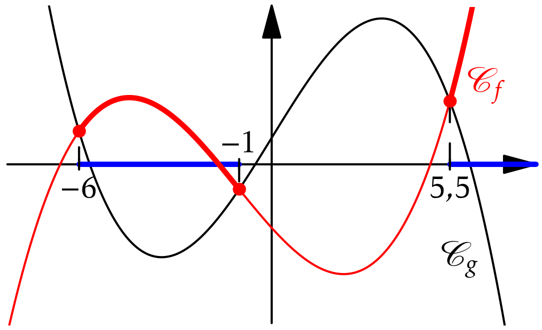
Soient f et g deux fonctions définies I et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques.
Les solutions de $f(x) \geq g(x)$ (resp. $f(x) \leq g(x)$) sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus (resp. en dessous) ou sur le point de $\mathscr{C}_g$ avec la même abscisse.

Exemple :

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$. Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$.

Solution : Les points d'intersections des deux courbes ont pour abscisses -6, -1 et $5{,}5$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ si $x \in [-6;-1]$ ou si $x \in [5{,}5;+\infty[$.

Les solutions de $f(x) > g(x)$ sont donc $]-6;-1[\cup]5{,}5;+\infty[$.



Exercice 4 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes sont données ci-contre. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $f(x) = 0$ 2) $f(x) \leq 3$ 3) $f(x) > -2$

4) $f(x) = -3$ 5) $g(x) \geq 2$ 6) $f(x) < g(x)$