

## Chapitre 2

# Géométrie plane

## I) Théorème de Pythagore

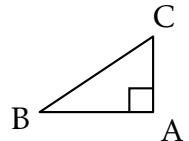
### THÉORÈME : Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

### EXEMPLE :

Dans le triangle ABC ci-contre, rectangle en A, on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



### EXEMPLE : Calculer la longueur de l'hypoténuse

Soit ABC un triangle rectangle en A. On sait que AB = 5 cm et AC = 8 cm. Calculer la longueur de [BC].

Solution : Puisque le triangle ABC est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 5^2 + 8^2 \\ &= 25 + 64 \\ &= 89 \\ BC &= \sqrt{89} \\ &\approx 9,43 \text{ cm} \end{aligned}$$

### EXEMPLE : Calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit

Soit XYZ un triangle rectangle en Y avec YZ = 7,2 cm et XZ = 9,7 cm. Calculer XY.

Solution : Puisque le triangle est rectangle en Y, [XZ] est l'hypoténuse.

Alors d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$XY^2 + YZ^2 = XZ^2$$

Donc

$$\begin{aligned} XY^2 &= XZ^2 - YZ^2 \\ &= 9,7^2 - 7,2^2 \\ &= 94,09 - 51,84 \\ &= 42,25 \\ XY &= \sqrt{42,25} \\ &= 6,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

### EXERCICE 1 :

- 1) Soit VIL un triangle rectangle en I tel que VI = 6 cm et VL = 14 cm. Calculer la mesure de IL au millimètre près.
- 2) Soit BIG un triangle rectangle en I tel que BI = 7 cm et IG = 9 cm. Calculer la mesure de BG au millimètre près.



### PROPRIÉTÉ : *Contraposée du théorème de Pythagore*

Si dans un triangle, le carré de la longueur du côté le plus long n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.



### EXEMPLE : *Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle*

Soit SAC un triangle tel que  $SA = 6\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$  et  $CS = 7\text{cm}$ . Est-ce qu'il est rectangle?

**Solution :** Le côté [CS] est le plus long. On compare  $CS^2$  et  $AS^2 + AC^2$ :

$$\begin{array}{ll} CS^2 = 7^2 & SA^2 + AC^2 = 6^2 + 4^2 \\ & = 49 \\ & = 36 + 16 \\ & = 52 \end{array}$$

Puisque  $52 \neq 49$ , d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle SAC n'est pas rectangle.



### RÉCIPROQUE : *Réciproque du théorème de Pythagore*

Si dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.



### EXEMPLE : *Montrer qu'un triangle est rectangle*

Soit TAS, un triangle tel que  $TA = 4\text{cm}$ ,  $AS = 5,8\text{cm}$  et  $ST = 4,2\text{cm}$ . Est-ce que ce triangle est rectangle?

**Solution :** Le côté le plus long est [AS]. On compare  $AS^2$  et  $TA^2 + ST^2$ .

$$\begin{array}{ll} AS^2 = 5,8^2 & TA^2 + ST^2 = 4^2 + 4,2^2 \\ & = 33,64 \\ & = 16 + 17,64 \\ & = 33,64 \end{array}$$

Puisque  $AS^2 = TA^2 + ST^2$ , d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TAS est rectangle en T.



### EXERCICE 2 :

Pour chacun des triangles ci-dessous, dire s'il s'agit d'un triangle rectangle ou non, en justifiant.

- 1) Le triangle BAG tel que  $BA = 16\text{cm}$ ,  $AG = 24\text{cm}$  et  $BG = 28,9\text{cm}$ .
- 2) Le triangle RIZ tel que  $RI = 12\text{cm}$ ,  $IZ = 20,9\text{cm}$  et  $RZ = 24,1\text{cm}$ .

On peut utiliser la fonction Python suivante pour tester si un triangle est rectangle. La longueur la plus grande doit être en 3<sup>e</sup> position :

**Fonction Pythagore( $a, b, c$ ):**

Si  $a^2 + b^2 = c^2$ :

    Afficher "Rectangle"

Sinon :

    Afficher "Pas rectangle"

```
def pythagore(a, b, c):  
    if a*a + b*b == c*c:  
        print("Triangle rectangle")  
    else:  
        print("Triangle pas rectangle")
```

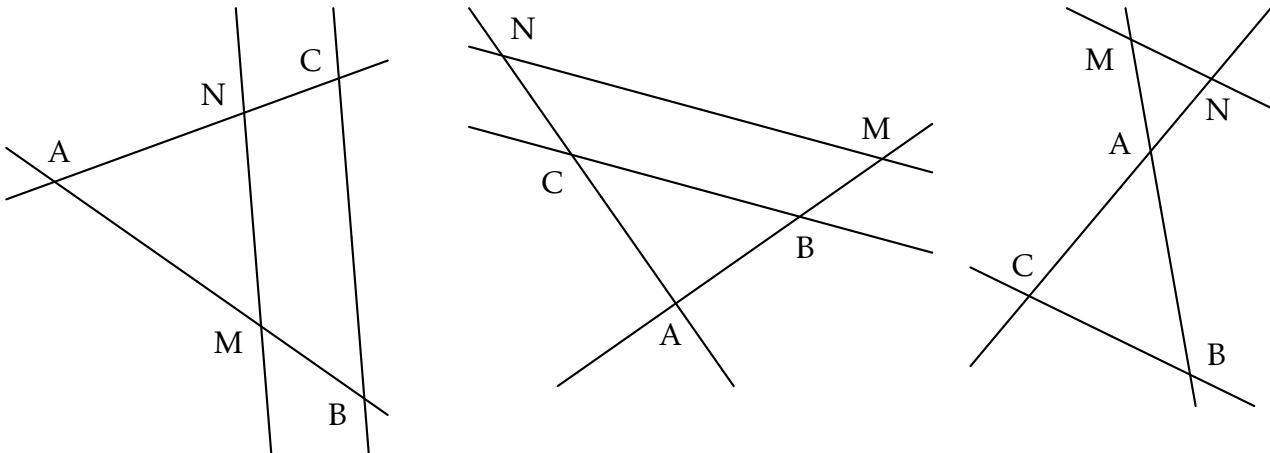
## II) Théorème de Thalès

### 💡 THÉORÈME : Théorème de Thalès

Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites sécantes en  $A$ . Soient  $B$  et  $M$  deux points de  $(d)$  différents de  $A$ . Soient  $C$  et  $N$  deux points de  $(d')$  différents de  $A$ . Si les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  sont parallèles, alors on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Voici les 3 configurations possibles :



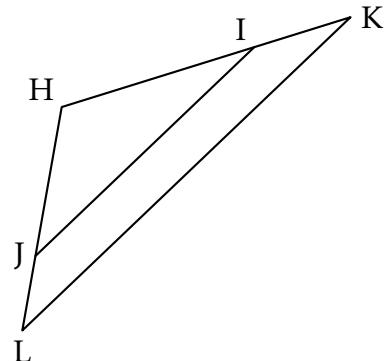
### 💡 EXEMPLE : Calculer une longueur

On considère la figure suivante :

- $HKL$  est un triangle.
- $I$  est un point de  $[HK]$ ,  $J$  un point de  $[HL]$ .
- $(IJ)$  est parallèle à  $(KL)$ .
- $HJ = 2\text{ cm}$  ;  $HL = 3\text{ cm}$  ;  $KL = 6\text{ cm}$  et  $HK = 4\text{ cm}$ .

Calculer  $IJ$ .

**Solution :** Puisque  $H$ ,  $I$  et  $K$ , ainsi que  $H$ ,  $J$  et  $L$ , sont alignés et que  $(IJ)$  est parallèle à  $(KL)$ , alors d'après le théorème de Thalès, on a :



$$\frac{HI}{HK} = \frac{HJ}{HL} = \frac{IJ}{KL}$$

$$\text{Donc } \frac{IJ}{6} = \frac{2}{3}. \text{ D'où } IJ = \frac{6 \times 2}{3} = \boxed{4\text{ cm}}.$$

### ❓ EXERCICE 3 :

- Soit  $IJK$  un triangle tel que  $IJ = 6\text{ cm}$  ;  $JK = 3\text{ cm}$  et  $IK = 7\text{ cm}$ . Soit  $L$  un point de  $[IJ]$  tel que  $IL = 8\text{ cm}$ . Soit  $M$  l'intersection de  $(IK)$  et de la parallèle à  $(JK)$  passant par  $L$ . Calculer  $LM$  et  $IM$ .

### 💡 PROPRIÉTÉ : Contraposée du théorème de Thalès

Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites sécantes en  $A$ .

Soient  $B$  et  $M$  deux points de  $(d)$ , distincts de  $A$ .

Soient  $C$  et  $N$  deux points de  $(d')$ , distincts de  $A$ .

Si  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ , alors les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  ne sont pas parallèles.

### EXEMPLE :

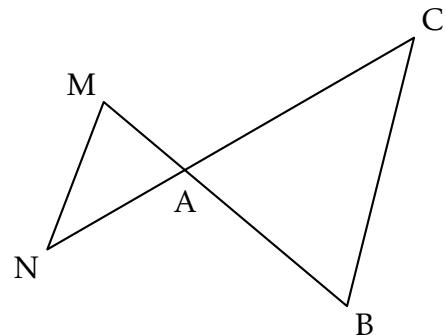
On considère la figure ci-contre.

Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. On a  $AB = 4\text{ cm}$ ,  $AC = 5\text{ cm}$ ,  $AM = 2\text{ cm}$  et  $AN = 3\text{ cm}$ .

Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?

**Solution :** On calcule :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6$$



Puisque  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ , et que M, A et B, ainsi que N, A et C sont alignés, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

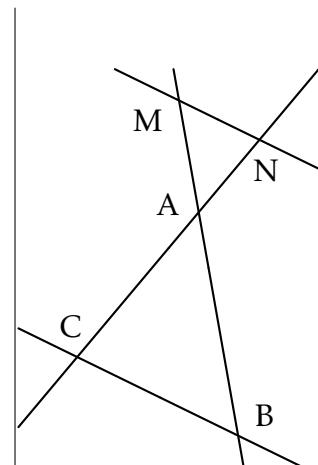
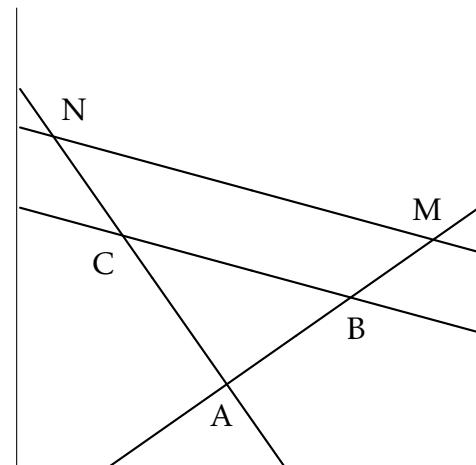
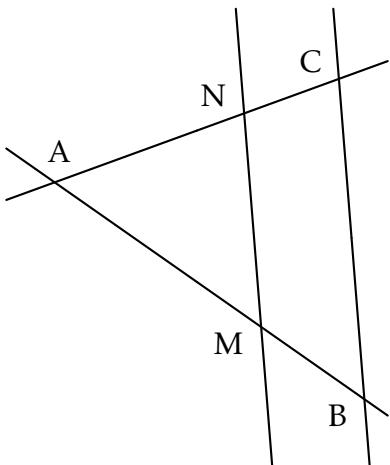
### RÉCIPROQUE :

Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites sécantes en A.

Soient B et M deux points de  $(d)$ , distincts de A.

Soient C et N deux points de  $(d')$ , distincts de A.

Si  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  et si les points A, B et M et les points A, C et N sont alignés dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Les points A, M, B et les points C, N sont dans le même ordre.

Les points A, B, M et les points C, N sont dans le même ordre.

Les points M, A, B et les points N, A, C sont dans le même ordre.

### EXEMPLE :

Soient A, B et C, trois points non alignés. Soit M un point de [BA] ne se trouvant pas sur [BA] et N un point de [CA] ne se trouvant pas sur [CA]. On a les longueurs suivantes :  $AB = 12\text{ cm}$ ,  $AC = 15\text{ cm}$ ,  $AM = 4\text{ cm}$  et  $AN = 5\text{ cm}$ . Démontrer que (BC) est parallèle à (MN).

**Solution :** Calculons  $\frac{AM}{AB}$  et  $\frac{AN}{AC}$ .

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Donc  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

Les points M, A, B et N, A, C sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

## ?

### EXERCICE 4 :

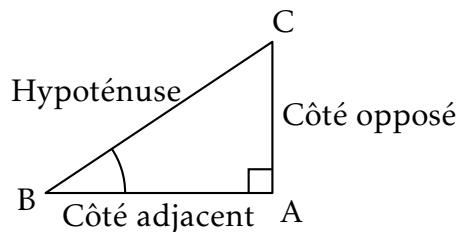
- 1) Soit ABC un triangle tel que AB = 8 cm ; AC = 7 cm et BC = 10 cm. On place M sur [AB] et N sur [AC] tels que AM = 3,6 cm et AN = 3,2 cm. Est-ce que les droites (BC) et (MN) sont parallèles ?
- 2) On place I sur [BA] et J sur [CA] tels que AI = 10,4 cm et AJ = 9,1 cm. Est-ce que (BC) et (IJ) sont parallèles ?

## III) Trigonométrie

### ♥ DÉFINITION :

Dans un triangle rectangle ABC, rectangle en A, on définit le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente** de l'angle  $\widehat{ABC}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{ABC} &= \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} \\ \sin \widehat{ABC} &= \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AC}{AB}\end{aligned}$$



### EXEMPLE : Calculer la longueur d'un côté

Soit EDF un triangle rectangle en E. On sait que DE = 5 cm et  $\widehat{EDF} = 24^\circ$ . Calculer la longueur de [DF] au millimètre près.

Solution : Dans le triangle EDF rectangle en E, on connaît le côté adjacent et on cherche l'hypoténuse. On utilise donc le cosinus :

$$\cos \widehat{EDF} = \frac{DE}{DF}$$

Donc :

$$DF = \frac{DE}{\cos \widehat{EDF}} = \frac{5}{\cos 24^\circ} \approx 5,5 \text{ cm}$$

### EXEMPLE : Calculer la longueur d'un côté

Soit RST un triangle rectangle en R, avec RS = 5 cm et  $\widehat{RST} = 48^\circ$ . Calculer RT au millimètre près.

Solution : Dans le triangle RST rectangle en R, on connaît le côté adjacent et on cherche le côté opposé. On utilise donc la tangente :

$$\tan \widehat{RST} = \frac{RT}{RS}$$

Donc :

$$RT = RS \times \tan \widehat{RST} = 5 \times \tan 48 \approx 5,6 \text{ cm}$$

### EXEMPLE : Calculer un angle

Soit NOP un triangle rectangle en O, avec NP = 12 cm et OP = 8 cm. Calculer la mesure de  $\widehat{ONP}$  au dixième de degré près.

Solution : Dans le triangle NOP rectangle en O, on connaît le côté opposé et l'hypoténuse. On utilise donc le sinus :

$$\sin \widehat{ONP} = \frac{OP}{NP} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Avec la calculatrice, on trouve  $\widehat{ONP} = 41,8^\circ$ .

## ?

### EXERCICE 5 :

- ~ On considère un triangle ABC rectangle en A.
  - 1) Si  $AB = 7 \text{ cm}$  et  $\widehat{ABC} = 26^\circ$ , combien mesurent  $[AC]$  et  $[BC]$ ?
  - 2) Si  $BC = 9 \text{ cm}$  et  $\widehat{ABC} = 42^\circ$ , combien mesurent  $[AC]$  et  $[AB]$ ?
  - 3) Si  $BC = 5 \text{ cm}$  et  $AB = 3 \text{ cm}$ , combien mesure  $\widehat{ABC}$ ?
  - 4) Si  $AB = 11 \text{ cm}$  et  $AC = 9 \text{ cm}$ , combien mesure  $\widehat{ABC}$ ?

#### 💡 PROPRIÉTÉ :

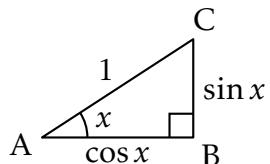
Soit  $x$ , la mesure d'un angle aigu. Alors :

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $0 \leq \cos x \leq 1$
- $0 \leq \sin x \leq 1$
- $0 \leq \tan x$

#### DÉMONSTRATION :

Soit ABC un triangle rectangle en B avec  $AC = 1$ . On pose  $x = \widehat{BAC}$ .  
On a donc :

$$\cos x = \frac{AB}{AC} = AB \quad \sin x = \frac{BC}{AC} = BC$$



D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

D'où :

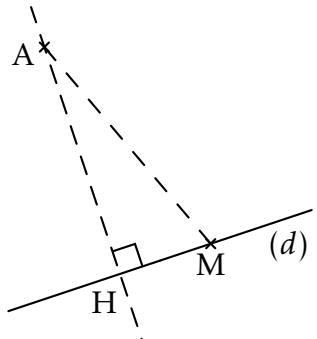
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

■

## IV) Projeté orthogonal

#### ❤️ DÉFINITION :

Soit  $(d)$  une droite et A un point. Le **projeté orthogonal** de A sur  $(d)$  est le point d'intersection entre  $(d)$  et la perpendiculaire à  $(d)$  passant par A.



#### 💡 PROPRIÉTÉ :

Soit H le projeté orthogonal d'un point A sur une droite  $(d)$ . Alors pour tout point M de  $(d)$ ,  $AH \leq AM$ .

#### DÉMONSTRATION :

Il y a deux cas.

- Si A est sur  $(d)$ , alors  $A = H$  et donc  $AH = 0$ . Donc  $AH \leq AM$  pour tout point M de  $(d)$ .
- Si A n'est pas sur  $(d)$ , alors si M est un point de  $(d)$  différent de H, AMH est rectangle en H.

Le côté  $[AM]$  est l'hypoténuse de ce triangle et donc  $AH < AM$ .

■

## ?

### EXERCICE 6 :

- ~ Soient A, B et C trois points tels que  $AB = 3,3$ ,  $BC = 6,5$  et  $AC = 5,6$ .
- ~ Démontrer que A est le projeté orthogonal de C sur  $(AB)$ .

### ♥ DÉFINITION :

Soit  $H$  le projeté orthogonal d'un point  $A$  sur une droite  $(d)$ . On dit que  $AH$  est la **distance** de  $A$  à  $(d)$ .

### ❓ EXERCICE 7 :

- Soient  $(d)$  une droite et  $M$  un point qui n'est pas sur  $(d)$ . Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(d)$ .
- Soit  $B \in d$  tel que  $BH = 4$  et  $\widehat{HBM} = 50^\circ$ .
- Déterminer la distance de  $M$  à  $(d)$ .

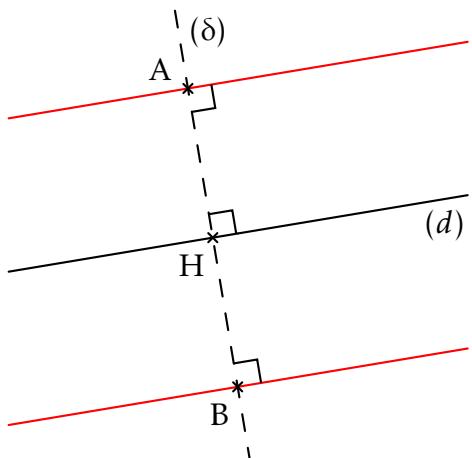
### 💡 PROPRIÉTÉ :

L'ensemble des points à une même distance d'une droite  $(d)$  est formé de deux droites parallèles à  $(d)$  et placées des deux côtés de  $(d)$ .

### ♥ MÉTHODE :

Pour tracer l'ensemble des points à 2 cm de la droite  $(d)$ :

- On place un point  $H$  sur  $(d)$ .
- On trace la perpendiculaire  $(\delta)$  à  $(d)$  passant par  $H$ .
- On place les points  $A$  et  $B$  sur  $(\delta)$  se trouvant à 2 cm de  $H$ .
- On trace les perpendiculaires à  $(\delta)$  passant par  $A$  et par  $B$ .

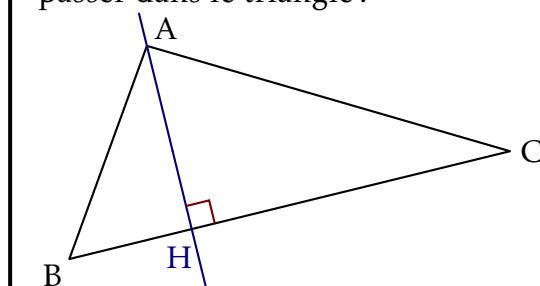


### ♥ DÉFINITION :

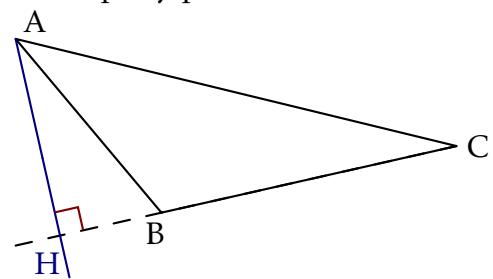
Dans un triangle, la **hauteur** issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

### ✏️ EXEMPLE :

La hauteur issue d'un sommet peut :  
passer dans le triangle :



ou ne pas y passer du tout :



### ❓ EXERCICE 8 :

- Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 5$ ,  $AC = 4$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .
- Calculer l'aire de  $ABC$ .