

Chapitre 15

Probabilités

I) Définitions

♥ DÉFINITION :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir l'issue. Chacune des **issues** possibles est aussi appelée un **évènement élémentaire**.

§ EXEMPLE :

Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher : 2 bleus, 5 verts et 3 rouges. On tire au hasard un jeton de l'urne. Cette expérience aléatoire comporte trois issues : "tirer un jeton bleu", "tirer un jeton vert" et "tirer un jeton rouge".

Dans ce chapitre, nous étudierons exclusivement des expériences aléatoires ayant un nombre fini d'issues.

♥ DÉFINITION :

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience. Il est souvent noté E ou Ω .

[Ex 25, 30 page 326]

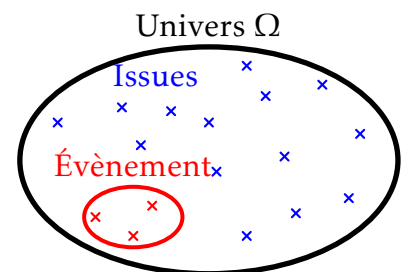
[Ex 69, 71 page 331]

II) Évènement

II.1) Cas général

♥ DÉFINITION :

Un **évènement** est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire.



§ EXEMPLE :

On lance un dé à six faces. A : "obtenir un nombre pair" ou B : "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4" sont des évènements de cette expérience aléatoire. Le premier est composé des issues 2, 4 et 6. Le second est composé des issues 1, 2, 3 et 4.

On utilise souvent des notations sous forme d'ensembles : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

♥ DÉFINITION :

Un évènement qui ne se réalise jamais est appelé un évènement **impossible**. On le note \emptyset . Un évènement qui se réalise toujours est appelé un évènement **certain**. On le note comme l'univers : E ou Ω .

EXEMPLE :

Reprenons le lancé de dé à 6 faces : “obtenir un 7” est un évènement impossible ; “obtenir un nombre inférieur à 7” est un évènement certain.

II.2) Évènements particuliers

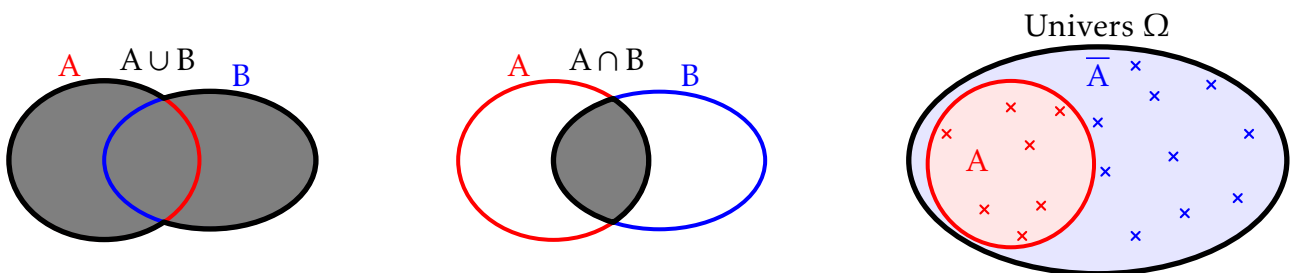
♥ DÉFINITIONS :

Soient A et B deux évènements.

L'évènement “A ou B”, noté $A \cup B$, est appelé la **réunion** (ou l'**union**) des évènements A et B. Il est constitué de toutes les issues de A et B.

L'évènement “A et B”, noté $A \cap B$, est appelé l'**intersection** de A et B. Il est constitué des issues communes à A et B.

L'évènement **contraire**, noté \bar{A} , est l'évènement constitué des issues qui n'appartiennent pas à A.



? EXERCICE 1 :

On lance un dé à six faces. On note A : “obtenir un nombre pair” ou B : “obtenir un nombre inférieur ou égal à 4”. Compléter :

- | | | | |
|-------|----------------|---------------|---------------------------|
| • A = | • $A \cup B =$ | • $\bar{A} =$ | • $\overline{A \cup B} =$ |
| • B = | • $A \cap B =$ | • $\bar{B} =$ | • $\overline{A \cap B} =$ |

♥ DÉFINITION :

Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsqu'ils ne possèdent pas d'issue commune. C'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Deux évènements A et B sont dits **contraires** s'ils sont disjoints et si $A \cup B = \Omega$.

EXEMPLE :

Dans l'exemple précédent, les évènements A : “obtenir un nombre pair” et B : “obtenir un nombre impair” sont des évènements incompatibles.

En effet $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 3; 5\}$. Ils sont même contraires.

💡 PROPRIÉTÉ :

Pour tout évènement A, on a :

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

III) Probabilité d'un évènement

III.1) Cas général

DÉFINITION :

La **probabilité** d'un évènement A, noté $P(A)$, est la somme des probabilités des issues qui constituent A.

PROPRIÉTÉ :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement A, $0 \leq P(A) \leq 1$

EXERCICE 2 :

On lance un dé truqué dont la loi de probabilité est :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,1

- 1) Calculer la probabilité de l'évènement A : "obtenir un nombre pair".
- 2) Calculer la probabilité de l'évènement B : "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4".
- 3) Calculer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

III.2) Cas d'équiprobabilité

DÉFINITION :

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que l'on se trouve dans une situation d'**équiprobabilité**.

EXEMPLE :

Pour une expérience aléatoire comportant n issues équiprobables, chaque issue a pour probabilité de $\frac{1}{n}$.

PROPRIÉTÉ :

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues vérifiant A}}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

EXEMPLE :

On lance un dé équilibré à six faces. Alors la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$. Si on note A l'évènement "obtenir un nombre pair", alors sa probabilité est :

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

III.3) Loi de probabilité

DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire comportant n issues notées x_1, x_2, \dots, x_n . Définir la **loi de probabilité** de l'expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i tel que :

- $p_i \in [0; 1]$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

EXEMPLE :

Reprenons l'expérience aléatoire des 10 jetons, on obtient la loi de probabilité suivante :

Issue	B	V	R
Probabilité	0,2	0,5	0,3

[Ex résolu 1 + ex 1 page 321 + 28 page 326]

[Ex résolu 2 + ex 4 page 321 + 32, 35 page 327]

[Ex résolu 3 + ex 6 page 322 + 40, 41 page 327]

[Ex 76, 78 page 331/332]

[Ex 93, 94 page 333]

III.4) Réunion, intersection, contraire

PROPRIÉTÉ :

Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. On a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EXEMPLE :

Vérifions la formule précédente. On lance un dé équilibré à six faces. On note A : "obtenir un nombre pair" et B : "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4". Alors :

$$A = \{2; 4; 6\} \quad B = \{1; 2; 3; 4\} \quad A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\} \quad A \cap B = \{2; 4\}$$

Donc :

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} \quad P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

On a bien $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

PROPRIÉTÉ :

- Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout évènement A, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

 **EXEMPLE :**

On garde les notations de l'exemple précédent. $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Donc $P(B) = \frac{4}{6}$ et $P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6}$.

En effet, $\bar{B} = \{5; 6\}$.

[Ex résolu 4 + ex 9 page 323 + ex 42, 43, 44, 45, 46 page 328]

[Ex 79 ... 87 page 332]

[Ex 88, 90, 91 page 332]

[Ex bilan : 115, 116, 121 page 337/338]