

Chapitre 7

Proportions et taux d'évolution

I) Proportions de proportions

I.1) Définitions

DÉFINITIONS :

- On appelle **population** un ensemble d'éléments, appelés **individus**.
- Toute partie (ou sous-ensemble) de cette population est appelée **sous-population**.
- Le nombre d'individus d'une (sous-)population est appelé son **effectif**.
- L'**effectif total** est le nombre total d'individu de la population.

DÉFINITION :

La **proportion** (ou **fréquence**) d'une sous-population A d'effectif n_A dans une population E d'effectif total n_E est le nombre :

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif total}}$$

REMARQUES :

- Une proportion est un nombre toujours compris entre 0 et 1.
- Les proportions s'expriment sous la forme d'une fraction, sous forme décimale ou bien encore sous la forme d'un pourcentage.
- On a aussi $n_A = p \times n_E$ et $n_E = \frac{n_A}{p}$.

EXEMPLE : Calculer une proportion

Une classe de 30 élèves contient 21 filles. Quelle est la proportion de filles de cette classe ?

Exprimer ensuite ce résultat sous forme de pourcentage.

Solution :

On a $n_E = 30$ et $n_A = 21$.

La proportion de filles dans la classe est :

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{21}{30} = 0,7 = \frac{70}{100}$$

Dans cette classe, 70 % des élèves sont des filles.

EXEMPLE : Calculer un effectif

M. Durand et M. Dupond se présente à une élection. Un sondage est réalisé auprès de 1 500 personnes. Il y a 47 % qui disent vouloir voter pour M. Durand.

Combien de personnes ont dit vouloir voter pour lui ?

Solution :

On a $n_E = 1 500$ et $p = 47 \%$.

$$n_A = n_E \times p = 1 500 \times \frac{47}{100} = 705$$

Il y a 705 personnes qui disent vouloir voter pour M. Durand.

EXEMPLE : Calculer l'effectif total

Dans un petit port, il y a 600 pêcheurs. Cela représente les $\frac{5}{6}$ des habitants.

Combien est-ce qu'il y a d'habitants au total?

Solution :

On a $p = \frac{5}{6}$ et $n_A = 600$.

$$n_E = \frac{n_A}{p} = \frac{600}{\frac{5}{6}} = 720$$

Il y a 720 habitants dans le port.

EXERCICE 1 :

Le prix d'un livre hors taxe est de 40€. Toutes taxes comprises, le prix est de 42€.

Quelle est le pourcentage de taxes dans le prix de ce livre?

EXERCICE 2 :

2000 spectateurs sont venus assister à un tournoi sportif. Parmi ces spectateurs, 24%

ont moins de 20 ans. Combien de spectateurs ont moins de 20 ans?

EXERCICE 3 :

Lors d'un examen, il y a 120 admis, ce qui représente 80% des inscrits. Combien est-ce qu'il y avait de candidats inscrits?

I.2) Union et intersection

DEFINITIONS :

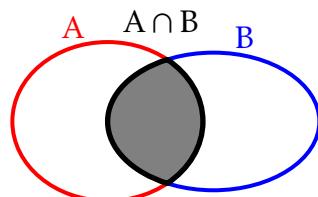
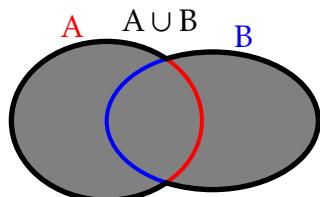
Soient A et B deux sous-populations d'une population E.

“A ou B”, noté $A \cup B$, est appelé la **réunion** (ou l'**union**) des sous-populations A et B. Il est constitué de tous les individus qui sont soit dans A, soit dans B, soit dans les deux.

“A et B”, noté $A \cap B$, est appelé l'**intersection** de A et B. Il est constitué des individus appartenant à la fois à A et B.

A et B sont **disjoints** lorsqu'ils ne possèdent pas d'individu commun.

C'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.



EXERCICE 4 :

Lors d'une étude sur les élèves du lycée par rapport aux voyages en Angleterre, Espagne ou Italie, il y a eu 363 participants.

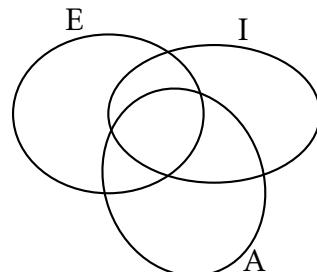
- 180 sont allés en Espagne, 192 en Angleterre et 199 en Italie.
- 103 ont visité au moins l'Espagne et l'Angleterre, 105 ont visité au moins l'Italie et l'Angleterre, et 123 sont allés au moins en Espagne et en Italie.
- 73 élèves ont visité les 3 pays.

1) Compléter le diagramme ci-contre.

2) Combien d'élèves :

- ont visité uniquement l'Espagne ;
- ont visité uniquement l'Italie et l'Angleterre ;
- ont visité au moins deux des trois pays.

3) Quelle est la proportion d'élèves ayant répondu qui n'ont visité aucun des 3 pays?



PROPRIÉTÉ :

Soient A et B deux sous-population d'une population E. On a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

EXERCICE 5 :

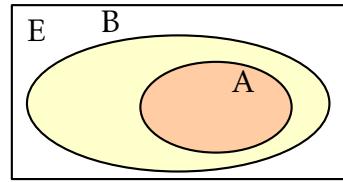
Dans une classe de 35 élèves, il y en a 20 qui font du foot et 15 qui font du judo. Parmi ces élèves 3 pratiquent les deux sports. On note C l'ensemble des élèves de la classe, F l'ensemble de ceux qui jouent au foot et J ceux qui font du judo.

- 1) Déterminer la proportion d'élèves qui font du foot et celle de ceux qui font du judo.
- 2) Déterminer la proportion d'élèves qui font au moins un des deux sports.
- 3) Déterminer la proportion d'élèves qui ne font aucun sport.

I.3) Proportions de proportions

♥ DÉFINITION :

Lorsque tous les éléments d'un ensemble A appartiennent à un ensemble B, on dit que A est **inclus** dans B et on le note $A \subset B$.

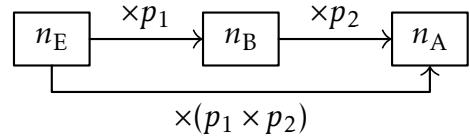


💡 PROPRIÉTÉ :

On considère 3 populations A, B et E avec A qui est inclus dans B et B qui est inclus dans E.

On note : $A \subset B \subset E$. Soit p_1 la proportion de B dans E et p_2 la proportion de A dans B. Alors, la population p de A dans E est :

$$p = p_1 \times p_2$$



❓ EXERCICE 6 :

- ⚡ Dans une entreprise, 60 % des employés sont des femmes et, parmi elles, 25 % ont moins de 30 ans.
Quelle proportion des employés de cette entreprise sont des femmes de moins de 30 ans?

❓ EXERCICE 7 :

- ⚡ Sur un site de streaming de vidéos, 7 % des vidéos regardées étaient des séries françaises. De plus, 35 % des vidéos regardées sont des séries. Déterminer la proportions de séries françaises parmi les séries regardées.

❓ EXERCICE 8 :

- ⚡ Dans une classe, 30 % des garçons sont demi-pensionnaires et 12 % des élèves de la classe sont des garçons demi-pensionnaires. Quelle est la proportions de garçons dans la classe?

II) Variation absolue et taux d'évolution

✍ EXEMPLE :

Le prix d'un article passe de 50 à 52 €.

Le prix a augmenté de $52 - 50 = 2$ €. On dit que la **variation absolue** du prix est de 2 €.

La **variation relative** du prix est de 2 € par rapport au prix initial de 50 €, c'est-à-dire $\frac{2}{50} = 0,04 = 4\%$.

Cette hausse de 2 € est donc une augmentation de 4 %.

♥ DÉFINITION :

On considère deux nombres réels strictement positifs y_1 et y_2 .

On appelle **variation absolue** de y_1 à y_2 (ou entre y_1 et y_2) le nombre $y_2 - y_1$.

On appelle **taux d'évolution** (ou **variation relative**) de y_1 à y_2 le nombre $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$.

REMARQUES :

- La variation absolue s'exprime dans la même unité que la grandeur y .
- Le taux d'évolution n'a pas d'unité ; on peut l'exprimer en pourcentage.
- Le taux d'évolution n'est pas une proportion. En particulier, il peut être supérieur à 100 %. Un prix qui passe de 100 à 300 augmente de 200 %.
- Une **variation positive** correspond à une **augmentation** et une **variation négative** à une **diminution**.

EXEMPLE :

La capacité d'un stade est passée de 15 000 à 21 000 places.

Calculer la variation absolue et le taux d'évolution de la capacité du stade.

Solution :

On a $y_1 = 15\ 000$ et $y_2 = 21\ 000$.

On calcule la variation absolue :

$$y_2 - y_1 = 21\ 000 - 15\ 000 = 6\ 000$$

L'évolution est de 6 000 places.

On calcule le taux d'évolution :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{21\ 000 - 15\ 000}{15\ 000} = 0,40 = 40\%$$

L'évolution des places est une hausse de 40 %.

EXEMPLE :

L'entreprise qui a effectué les travaux du stade employait 800 personnes il y a un an ; elle en emploie aujourd'hui 700.

Calculer la variation absolue et le taux d'évolution de l'effectif de l'entreprise.

Solution :

On a $y_1 = 800$ et $y_2 = 700$.

Variation absolue :

$$y_2 - y_1 = 700 - 800 = -100$$

L'évolution est en baisse de 100 personnes, ou l'évolution est de -100 personnes.

Taux d'évolution :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{700 - 800}{800} = -0,125 = -12,5\%$$

L'évolution de l'effectif est une baisse de 12,5 %.

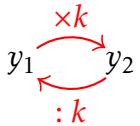
III) Coefficient multiplicateur

DÉFINITION :

Soient y_1 et y_2 deux valeurs strictement positives.

On appelle **coefficient multiplicateur** de y_1 à y_2 , le nombre k tel que $y_2 = k \times y_1$.

On a donc $k = \frac{y_2}{y_1}$ et aussi $y_1 = \frac{y_2}{k}$.



PROPRIÉTÉ :

On a aussi $k = t + 1$ et $t = k - 1$, avec t le taux d'évolution de y_1 à y_2 .

DÉMONSTRATION :

On a :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1}{y_1} = k - 1$$

Donc $k = t + 1$ ■

Cette propriété signifie que faire évoluer une quantité d'un taux t revient à la multiplier par $t + 1$.

Par exemple dire qu'une population augmente de 85 % signifie qu'elle a été multipliée par 1,85.

EXEMPLE : Calculer le coefficient multiplicateur

Dans un magasin, le nombre de clients mensuels est passé de 540 à 702 entre novembre et décembre. Par combien ce nombre a-t-il été multiplié?

Solution :

On a $y_1 = 540$ et $y_2 = 702$.

Le coefficient multiplicateur est :

$$k = \frac{y_2}{y_1} = \frac{702}{540} = 1,3$$

Le nombre de clients a été multiplié par 1,3.

EXEMPLE : Calculer la valeur finale

Une veste coûtait initialement 70 €. Le prix baisse de 25 %. Quel est le nouveau prix?

Solution :

On a $y_1 = 70$ et $t = -25 \%$.

Donc :

$$k = t + 1 = -0,25 + 1 = 0,75$$

Le nouveau prix est :

$$y_2 = y_1 \times k = 70 \times 0,75 = 52,50 \text{ €}$$

EXEMPLE : Calculer la valeur initiale

Le prix du baril de pétrole est de 55,24 €. Cela représente une baisse de 23 % par rapport au moins précédent. Combien coûtait-il il y a un mois ?

Solution :

On a $y_2 = 55,24$ et $t = -23\%$.

Donc

$$k = t + 1 = -0,23 + 1 = 0,77$$

Le prix précédent était :

$$y_1 = \frac{y_2}{k} = \frac{55,24}{0,77} \approx 71,74 \text{ €}$$

REMARQUE :

Soit k un coefficient multiplicateur entre deux valeurs y_1 et y_2 .

- Si $k > 1$, l'évolution de y_1 à y_2 est une hausse.
- Si $k < 1$, l'évolution est une baisse.

IV) Évolutions successives

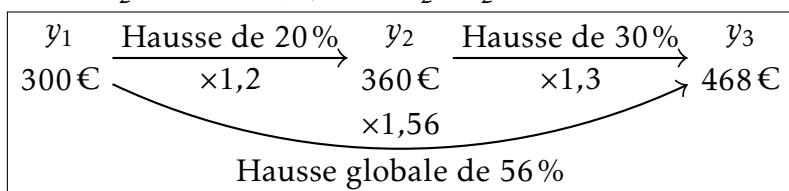
EXEMPLE :

Un loyer initialement de 300 € augmente une première fois de 20 % au 1^{er} janvier. Au 1^{er} septembre, le loyer augmente à nouveau de 30 %. Quel est le montant du loyer au 1^{er} septembre ? Quel est le taux d'évolution global du loyer ?

Solution :

Pour la 1^{re} évolution : $t_1 = 20\% = 0,2$, donc $k_1 = t_1 + 1 = 1,2$.

Pour la 2^{de} évolution : $t_2 = 30\% = 0,3$, donc $k_2 = t_2 + 1 = 1,3$.



Pour le montant final : $y_2 = 300 \times 1,2 = 360$ et $y_3 = 360 \times 1,3 = 468$.

Pour l'évolution globale : $t = \frac{468 - 300}{300} = 0,56 = 56\%$. C'est une hausse de 56 %.

Une hausse de 20 % puis une hausse de 30 % revient à une hausse de 56 %. Les taux d'évolution ne s'additionnent pas !

On remarque aussi que $k = t + 1 = 1,56$ et que $k_1 \times k_2 = 1,2 \times 1,3 = 1,56$. Donc $k = k_1 \times k_2$.

PROPRIÉTÉ :

Soient y_1 , y_2 et y_3 , trois nombres strictement positifs, k_1 le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2 et k_2 le coefficient multiplicateur de y_2 à y_3 .

Alors le coefficient multiplicateur k de l'évolution globale de y_1 à y_3 est donné par :

$$k = k_1 \times k_2$$

EXEMPLE : Calculer un taux global

À quelle évolution globale correspond une hausse de 40% suivie d'une baisse de 25%?

Solution :

Première évolution : $t_1 = +40\% = 0,4$, donc $k_1 = t_1 + 1 = 1,4$.

Deuxième évolution : $t_2 = -25\% = -0,25$, donc $k_2 = t_2 + 1 = 0,75$.

Évolution globale : $k = k_1 \times k_2 = 1,4 \times 0,75 = 1,05$. Donc $t = k - 1 = 1,05 - 1 = 0,05 = 5\%$.

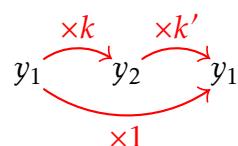
Augmenter de 40% puis baisser de 25% revient à augmenter de 5%.

V) Évolution réciproque

DÉFINITION :

On dit que deux évolutions sont **réciproques** lorsqu'elles se compensent mutuellement.

Si on note k le coefficient multiplicateur de la première évolution et k' celui de la seconde, alors dire que les évolutions sont réciproques revient à dire que $kk' = 1$.



MÉTHODE :

Pour déterminer le taux d'une évolution réciproque :

- On calcule le coefficient multiplicateur k de la première évolution à partir de son taux d'évolution t ;
- on calcule le coefficient multiplicateur k' de l'évolution réciproque par la relation $k' = \frac{1}{k}$;
- on en déduit le taux t' de l'évolution réciproque.

EXEMPLE : Calculer un taux réciproque

Le chiffre d'affaires d'une entreprise a baissé de 10% en 2024. De quel pourcentage, arrondi à 0,01% près, doit-il augmenter en 2025 pour compenser cette diminution?

Solution :

On a $t = -10\% = -0,1$ donc $k = t + 1 = -0,1 + 1 = 0,9$.

On calcule :

$$k' = \frac{1}{k} = \frac{1}{0,9} \approx 1,1111$$

Donc :

$$t' = k' - 1 \approx 0,1111 \approx 11,11\%$$

Ainsi pour compenser cette diminution, il faut effectuer une augmentation d'environ 11,11%.