Chapitre 4

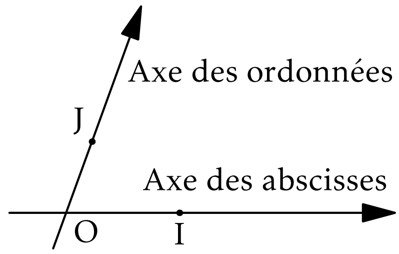
Repérage dans le plan

I) Repère et coordonnées

Définition :

Un **repère** dans le plan est défini par trois points (O;I,J) non alignés.

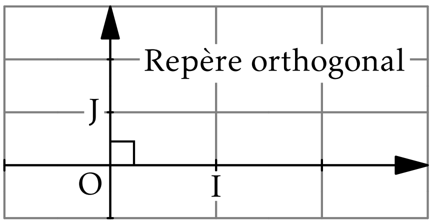
- O est **l'origine** du repère.
- (OI) est **l'axe des abscisses**.
- (OJ) est **l'axe des ordonnées**.

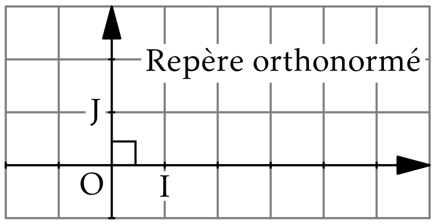


Remarque :

- Si (OI) $\perp$ (OJ), on dit que le repère est **orthogonal**.
- Si (OI) $\perp$ (OJ) et OI = OJ, le repère est **orthonormé** (ou orthonormal).

Exemples :

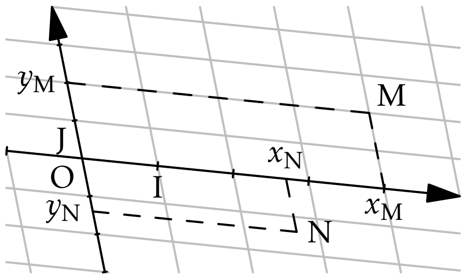




Définition :

Tout point M du plan est repéré par le couple de réels $(x_M; y_M)$.

- x_M est **l'abscisse** de M.
- y_M est **l'ordonnée** de M.
- $(x_M; y_M)$ sont **les coordonnées** de M.



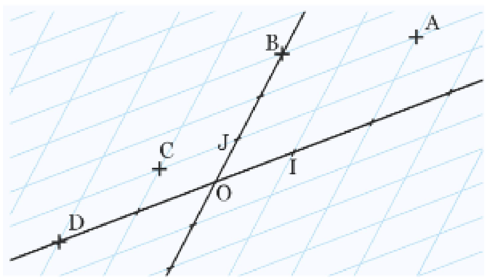
Remarque :

Les points ne sont pas toujours sur le quadrillage, comme c'est le cas pour $N(x_N; y_N)$.

Exercice 1 :

1) Le repère est-il orthogonal ? orthonormé ?
2) Lire les coordonnées des points A,B, C et D dans le repère (O,I,J).
3) Déterminer les coordonnées de tous les points A, B, C, D, I, J dans le repère (O,I,B).

5. Dans le repère (O;I,J), placer les points E(−3;4), F(0;−2) etG(3;2).



II) Milieu et distance

PROPRIÉTÉ : *(admise)*
Les coordonnées du milieu $K(x_K;y_K)$ d'un segment [AB] sont les moyennes des coordonnées des points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère du plan.

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

EXERCICE 2 :
On considère les points $A(-2;5)$ et $B(6;3)$ dans un repère orthonormé.
1) Calculer les coordonnées du milieu M du segment [AB].
2) Faire une figure et vérifier graphiquement le résultat.

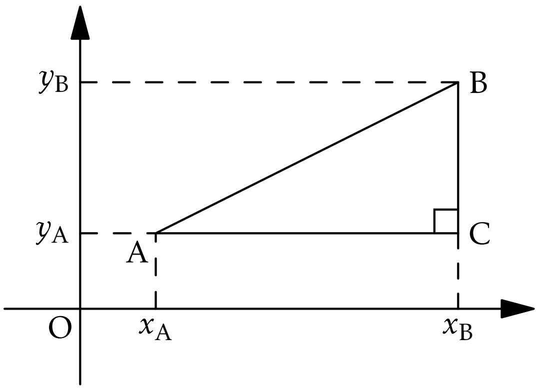
[Ex 32, 36, 16, 58, 61, 62 page 122...]

PROPRIÉTÉ :
La longueur d'un segment [AB] dans un repère **orthonormé** avec deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est égale à :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

DÉMONSTRATION :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'un repère orthonormé. On suppose que $x_A < x_B$ et que $y_A < y_B$. On pose $C(x_B;y_A)$.
Puisque le repère est orthogonal, le triangle ABC est rectangle en C. Donc d'après le théorème de Pythagore :



$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

Puisque AB est une distance, donc positive :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

■

EXERCICE 3 :
On considère les points $A(-2;5)$ et $B(6;3)$ dans un repère orthonormé. Calculer la longueur [AB].

Voici les fonctions Python permettant de calculer le milieu et la distance entre deux points.

```
def milieu(xA, yA, xB, yB):
    xM = (xA + xB)/2
    yM = (yA + yB)/2
    return (xM, yM)
```

```
from math import *

def distance(xA, yA, xB, yB):
    dx = xB - xA
    dy = yB - yA
    d = sqrt(dx**2 + dy**2)
    return d
```

[Ex 15, 3, 34, 35, 54, 55, 57 page 122...]

III) Configurations dans le plan

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère (O;I,J), on considère les points $A(-3;-1)$, $B(5;-2)$, $C(7;3)$ et $D(-1;4)$. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution : Démontrons que les diagonales de ABCD se coupent en leurs milieux.

Soit M le milieu de [AC] :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2 \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Donc $M(2;1)$.

Soit N le milieu de [BD] :

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Donc $N(2;1)$.

Le point de coordonnées $(2;1)$ est le milieu de [AC] et [BD].

Puisque le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors c'est un parallélogramme.

Conclusion : ABCD est un parallélogramme.

Exemple :

Soit $A(-5;2)$, $D(-3;5)$ dans un repère du plan. Calculer les coordonnées du symétrique E de D par rapport à A.

Solution : Par définition, A est le milieu de [DE]. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{x_D + x_E}{2} = x_A &\Leftrightarrow \frac{-3+x_E}{2} = -5 \\ &\Leftrightarrow -3 + x_E = -10 \\ &\Leftrightarrow x_E = -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{y_D + y_E}{2} = y_A &\Leftrightarrow \frac{5+y_E}{2} = 2 \\ &\Leftrightarrow 5 + y_E = 4 \\ &\Leftrightarrow y_E = -1 \end{aligned}$$

Conclusion : Le symétrique de D par rapport à A est $E(-7;-1)$.

Exemple :

Soit $A(-3;-1)$, $B(-3;4)$ et $C(1;2)$ trois points dans un repère du plan.
Soit D le point tel que ABCD est un parallélogramme. Calculer les coordonnées de D.
Solution : Soit M le milieu de [AC].

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

Par propriété, M est aussi le milieu de [BD]. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{x_B + x_D}{2} = x_M &\Leftrightarrow \frac{-3 + x_D}{2} = -1 \\ &\Leftrightarrow -3 + x_D = -2 \\ &\Leftrightarrow x_D = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{y_B + y_D}{2} = y_M &\Leftrightarrow \frac{4 + y_D}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 4 + y_D = 1 \\ &\Leftrightarrow y_D = -3 \end{aligned}$$

Conclusion : Le point D a pour coordonnées $(1;-3)$.

Exemple :

On considère les points $A(-2;-1)$, $B(1;3)$ et $C(-3;6)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.
Quelle est la nature du triangle ABC?
Solution : On calcule les longueurs :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-3-(-2))^2 + (6-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{1+49} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} CB &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-3))^2 + (3-6)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Puisque $AB = CB$, le triangle est isocèle en B.
De plus, $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50$ et $AC^2 = 50$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, puisque $AB^2 + BC^2 = AC^2$, le triangle est rectangle en B.
Conclusion : ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

[Ex 56, 59, 60, 63, 66, 62, 63, 66, 67 (68) et 80 page 122...]