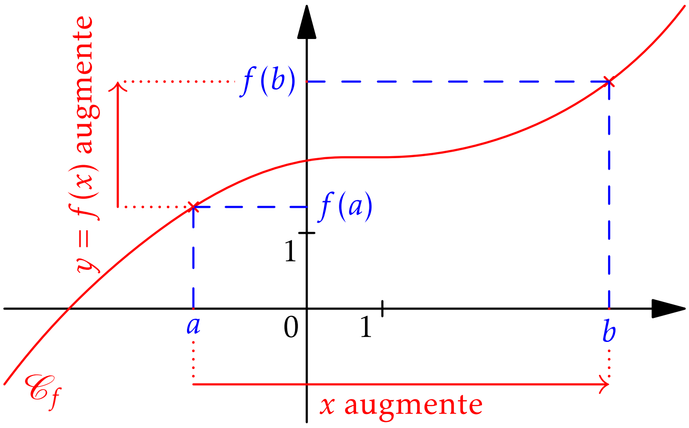
Chapitre 10
Sens de variation
I) Définitions

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **croissante** sur I si pour tous nombres a et b de I, on a :

$$\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$

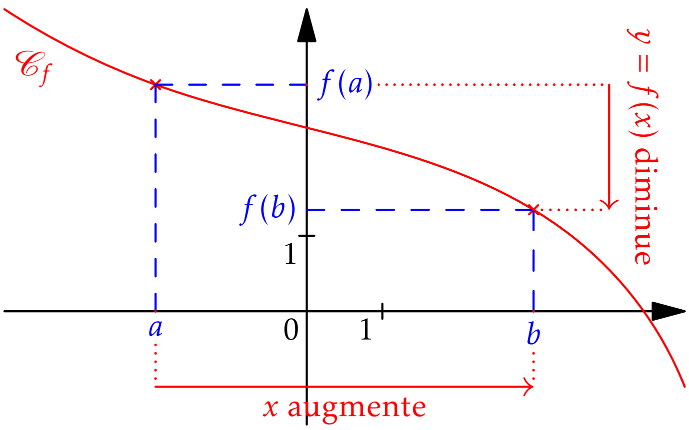
Intuitivement, cela signifie que lorsque x augmente, $f(x)$ augmente aussi. La fonction conserve l'ordre : deux nombres donnent des images rangées dans le même ordre.



Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **décroissante** sur I si pour tous nombres a et b de I, on a :

$$\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$

Cela signifie que lorsque x augmente, $f(x)$ diminue. La fonction change l'ordre : deux nombres donnent des images rangées dans l'ordre inverse.



Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **strictement croissante** sur I si pour tous nombres a et b de I, on a :

$$\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) < f(b)$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **strictement décroissante** sur I si pour tous nombres a et b de I, on a :

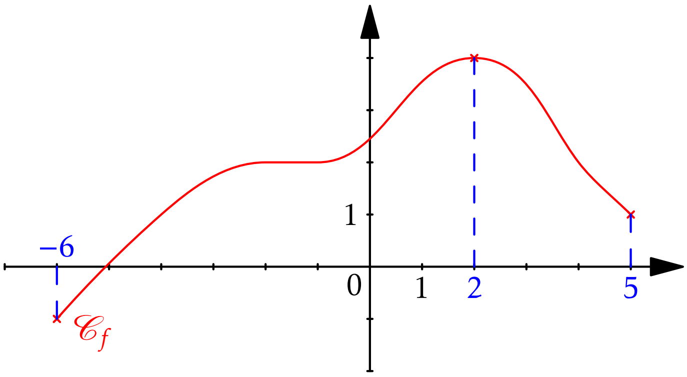
$$\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) > f(b)$$

DÉFINITION :

On dit qu'une fonction f est **(strictement) monotone** sur I si elle est soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante sur I.

EXEMPLE :

On considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;5]$.



La fonction f est croissante sur $[-6;2]$ et strictement décroissante sur $[2;5]$. Elle n'est pas monotone sur $[-6;5]$.

REMARQUES :

- On précise toujours l'intervalle sur lequel la fonction est croissante ou décroissante.
- Il ne suffit pas de vérifier que $f(-2) \leq f(2)$ pour conclure que f est croissante sur $[-2;2]$. Il faut le faire pour tous les nombres a et b de l'intervalle.
- Si une fonction est monotone sur un intervalle I, deux nombres différents de I peuvent avoir la même image. Ce n'est pas possible avec une fonction strictement monotone.

PROPRIÉTÉ :

Soit une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si $m = 0$, alors f est constante.
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante.

EXERCICE :

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes :

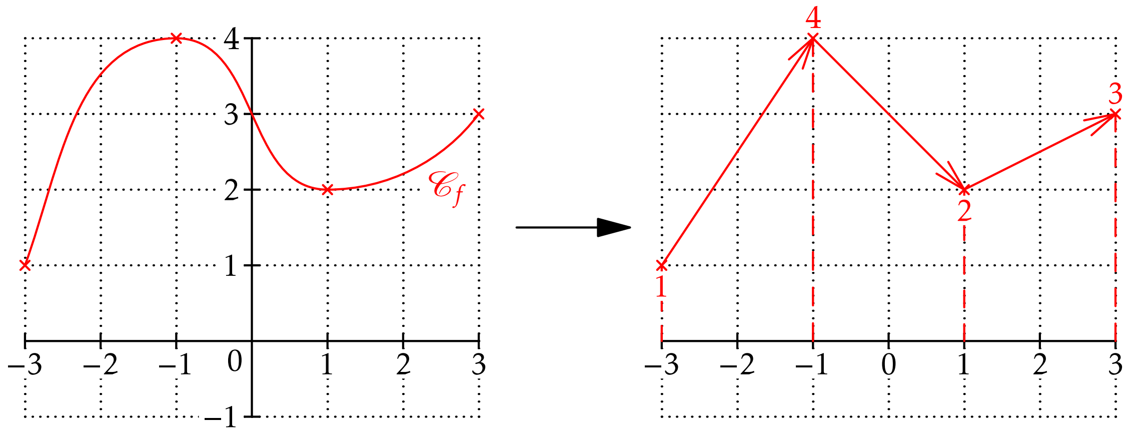
1) $f : x \mapsto 3x - 2$ 2) $g : x \mapsto -3x - 2$ 3) $h : x \mapsto 5 - 4x$

II) Tableau de variations

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est repérer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante (voire constante). On résume le sens de variation d'une fonction f par un **tableau de variations**. On schématise la courbe par des flèches indiquant le sens de variation (sans se préoccuper d'unités).

Exemple :

On considère la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-3;3]$.



La fonction est croissante sur $[-3;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$ et croissante sur $[1;3]$.
On traduit cela dans un tableau de variation :

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	1 ↗	4 ↘	2 ↗	3

III) Extrema

Définitions :

On dit que f **admet un maximum** sur I en a si, pour tout élément x de I, on a :

$$f(x) \leq f(a)$$

$f(a)$ est le **maximum** de f sur I

On dit que f **admet un minimum** sur I en a si, pour tout élément x de I, on a :

$$f(x) \geq f(a)$$

$f(a)$ est le **minimum** de f sur I

Exemple :

On considère la fonction f de l'exemple précédent qui était définie sur l'intervalle $[-3;3]$. La plus grande valeur que prend $f(x)$ est 4. C'est le maximum. Il est atteint pour $x = -1$. La plus petite valeur que prend $f(x)$ est 1. C'est le minimum. Il est atteint pour $x = -3$.