

Chapitre 11

Vecteurs et coordonnées

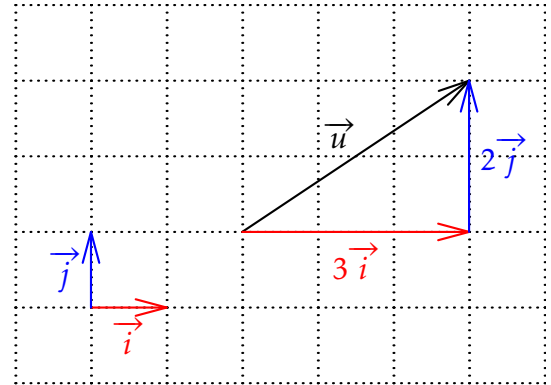
I) Bases et coordonnées

♥ DÉFINITION :

Soient \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs dont les directions sont perpendiculaires et tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. On appelle **base orthonormée** le couple $(\vec{i}; \vec{j})$.

💡 PROPRIÉTÉ :

Tout vecteur \vec{u} se décompose de façon unique en $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$.



🔪 EXEMPLE :

Dans la figure ci-contre, on a $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

♥ DÉFINITION :

On appelle **coordonnées** du vecteur \vec{u} le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$.

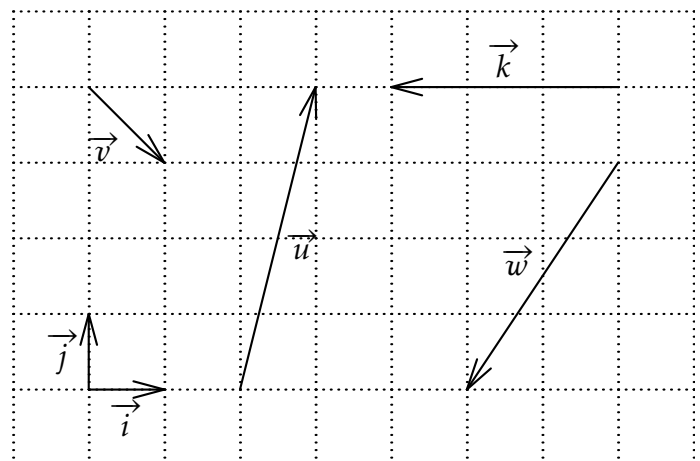
On peut utiliser la notation $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y)$.

🔪 EXEMPLE :

Dans l'exemple précédent, les coordonnées de \vec{u} sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

? EXERCICE 1 :

Lire les coordonnées des vecteurs ci-contre dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.



💡 PROPRIÉTÉ :

Dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$, la norme du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

? EXERCICE 2 :

⚡ Calculer les normes des vecteurs de l'exercice précédent.

💡 PROPRIÉTÉ :

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

II) Opérations et coordonnées

💡 PROPRIÉTÉ :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$.

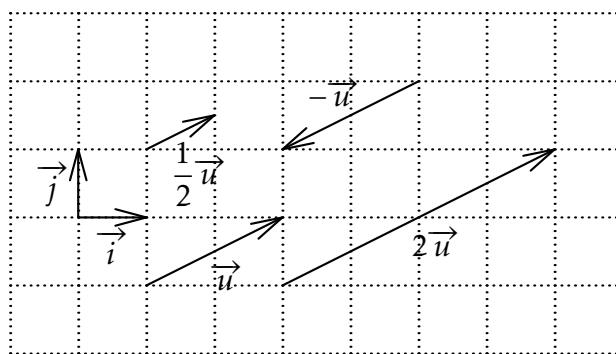
💡 PROPRIÉTÉ :

Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur du plan et soit k un nombre réel. Les coordonnées $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

📌 EXEMPLE :

On considère le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors :

- les coordonnées de $-\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- les coordonnées de $2\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- les coordonnées de $\frac{1}{2}\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.



? EXERCICE 3 :

⚡ Dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

⚡ Calculer les coordonnées des vecteurs :

⚡ 1) $\vec{u} + \vec{v}$

⚡ 2) $3\vec{v}$

⚡ 3) $2\vec{u} - \vec{v}$

♥ DÉFINITION :

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

💡 PROPRIÉTÉ :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** si, et seulement si, $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

DÉMONSTRATION :

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient non nuls.

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$\vec{v} = k\vec{u}$ si, et seulement si, les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont proportionnelles (c'est-à-dire que les produits en croix sont égaux).

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.



REMARQUE :

Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles.

? EXERCICE 4 :

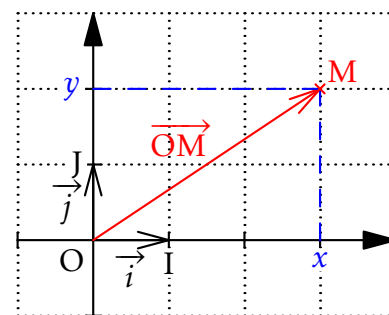
Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

- 1) $\vec{u}(5;2)$ et $\vec{v}(35;14)$.
- 2) $\vec{u}(16;3)$ et $\vec{v}(49;10)$.
- 3) $\vec{u}(\sqrt{2}-1;1)$ et $\vec{v}(1;\sqrt{2}+1)$.

III) Vecteurs et repères

DÉFINITION :

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée. On appelle **repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$ le repère $(O; I, J)$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

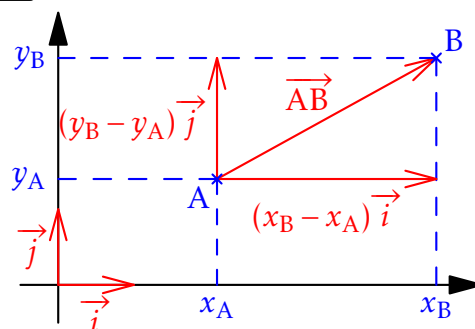


REMARQUE :

Soit $M(x; y)$ un point dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors le vecteur \overrightarrow{OM} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ :

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, deux points dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



? EXERCICE 5 :

Soient les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} .

! REMARQUE :

On a bien :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$$

? EXERCICE 6 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient $A(1;4)$, $B(4;3)$, $C(5;0)$ et $D(2,1)$.

1) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) Calculer AB et BC. Que peut-on en déduire?

3) Calculer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

IV) Applications

! PROPRIÉTÉ :

Soient A, B et I des points du plan. Le point I est le milieu de [AB] si, et seulement si,

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

! THÉORÈME :

Soient A, B et C des points du plan. A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

? EXERCICE 7 :

Démontrer que $A(-2;3)$; $B(2;1)$ et $C(4;0)$ sont alignés.

! THÉORÈME :

Soient A, B, C et D des points distincts du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

? EXERCICE 8 :

Soient $A(-4;-3)$; $B(8;1)$; $C(4;4)$ et $D(-2;2)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.