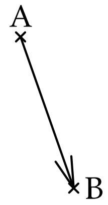
Chapitre 9

Vecteurs

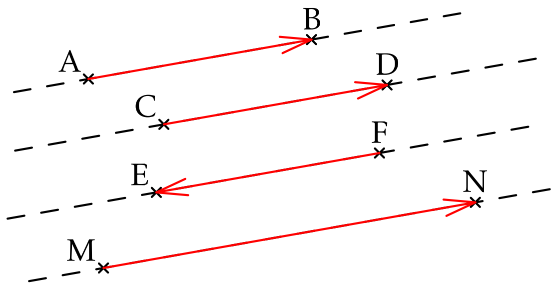
I) Définitions

DÉFINITION :
Soient A et B deux points du plan. La **translation** qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.
Si A et B sont confondus, on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. On dit que c'est le **vecteur nul**.
Si $A \neq B$, on représente $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.



DÉFINITION :
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$: la longueur AB.

EXEMPLE :
On considère 4 droites parallèles. Les points D et F sont les images de C et de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont la même direction.
Le vecteur $\overrightarrow{FE}$ n'a pas le même sens que les autres.
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ n'a pas la même norme que les autres.



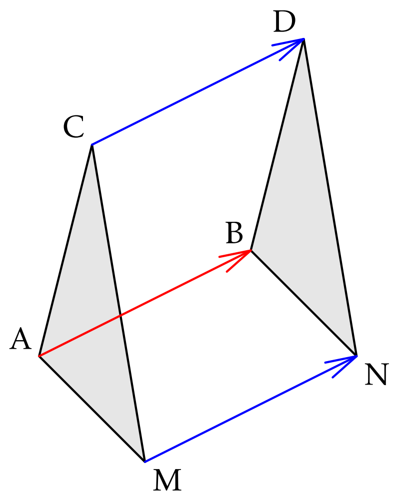
II) Égalité de vecteurs

DÉFINITION :
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

PROPRIÉTÉ :
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, une des conditions suivante est vérifiée :
- ABDC est un parallélogramme (éventuellement plat).
- [AD] et [BC] ont même milieu.
- La translation de A vers B est la même que celle de C vers D.

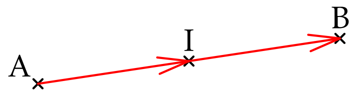
EXEMPLE :

Dans l'exemple ci-contre, Le triangle BND est l'image du triangle AMC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}$ ainsi que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DN}$.



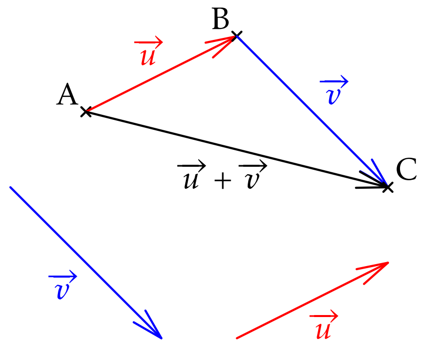
REMARQUE :
Puisque les vecteurs peuvent être définis à partir de n'importe quel point du plan, on les note généralement à l'aide d'une seule lettre comme $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$...

PROPRIÉTÉ :
Le point I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



III) Somme de deux vecteurs

PROPRIÉTÉ :
Lorsque l'on enchaîne deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'une après l'autres, on obtient une nouvelle translation. Le vecteur de cette translation est le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} + \vec{v}$.



PROPRIÉTÉ : *Relation de Chasles*
Pour tous points A, B et C du plan, on a :

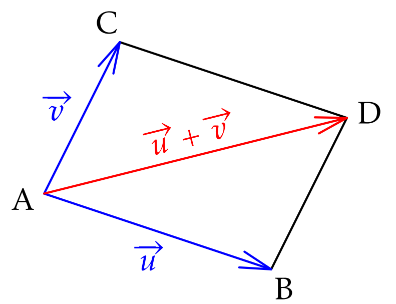
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

REMARQUE :
D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

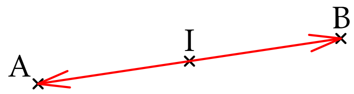
On dit que $\overrightarrow{BA}$ est **l'opposé** de $\overrightarrow{AB}$. On le note aussi $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

PROPRIÉTÉ : *Règle du parallélogramme*
Soient A, B et C des points du plan. Soit D un point du plan. Alors ABDC est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



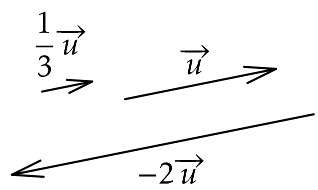
Remarque :
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$$

Propriété :
Le point I est le milieu de [AB] si et seulement si :
$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$$



IV) Produit d'un vecteur par un réel

Définition :
Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel, tous deux non nuls. Alors le vecteur $k\overrightarrow{u}$, le **produit de** $\overrightarrow{u}$ **par** k, est défini par :
- sa direction : la même que celle de $\overrightarrow{u}$;
- son sens : celui de $\overrightarrow{u}$ si $k>0$ et l'opposé de celui de $\overrightarrow{u}$ si $k<0$;
- sa norme : $|k|\times\|\overrightarrow{u}\|$.



Remarque :
Si $k=0$ ou si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, on a $k\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

Propriété :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, et k et k' deux réels. Alors :
- $k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=k\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$
- $(k+k')\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{u}+k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u})=(kk')\overrightarrow{u}$

Exemple :
- $3(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=3\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$
- $4\overrightarrow{w}-5\overrightarrow{w}=(4-5)\overrightarrow{w}=-\overrightarrow{w}$
- $\frac{1}{3}\times 9\overrightarrow{u}=\frac{9}{3}\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{u}$

Définition :
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire avec n'importe quel vecteur $\overrightarrow{u}$ puisque $\overrightarrow{0}=0\overrightarrow{u}$.