

Correction exercices cours

? EXERCICE 1 :

Solution :

- Les coordonnées de \vec{u} sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de \vec{v} sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de \vec{w} sont $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de \vec{k} sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

? EXERCICE 2 :

Solution :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
- $\|\vec{k}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

? EXERCICE 3 :

Dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs :

1) $\vec{u} + \vec{v}$

2) $3\vec{v}$

3) $2\vec{u} - \vec{v}$

Solution :

1) $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -1+3 \\ 2+4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) $3\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 3 \\ 3 \times 4 \end{pmatrix}$ donc $3\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

3) $2\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \times (-1) - 3 \\ 2 \times 2 - 4 \end{pmatrix}$ donc $2\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

? EXERCICE 4 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

1) $\vec{u}(5;2)$ et $\vec{v}(35;14)$.

2) $\vec{u}(16;3)$ et $\vec{v}(49;10)$.

3) $\vec{u}(\sqrt{2}-1;1)$ et $\vec{v}(1;\sqrt{2}+1)$.

Solution :

- 1) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 5 \times 14 - 2 \times 35 = 70 - 70 = 0$.
Ainsi les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- 2) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 16 \times 10 - 3 \times 49 = 160 - 147 = 13$.
Ainsi les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.
- 3) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = (\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1) - 1 \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$.
Ainsi les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

? EXERCICE 5 :

Soient les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{BC} .

Solution :

- $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 2 - 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\vec{BC} \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 4 - 2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

? EXERCICE 6 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient $A(1;4)$, $B(4;3)$, $C(5;0)$ et $D(2,1)$.

- 1) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Solution :

- $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{DC} \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 0 - 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puisque $\vec{AB} = \vec{DC}$ alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

- 2) Calculer AB et BC. Que peut-on en déduire?

Solution :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 4)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9 + 1} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(5 - 4)^2 + (0 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 9} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Solution :

Puisque le parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.

- 3) Calculer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Solution :

On calcule les coordonnées de \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MB} . On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1 - x \\ 4 - y \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 4 - x \\ 3 - y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puisque $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ alors on a :

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2(1-x) + 4 - x = 0 \\ 2(4-y) + 3 - y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x + 4 - x = 0 \\ 8 - 2y + 3 - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 6 = 0 \\ -3y + 11 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{11}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Le point M a pour coordonnées $\left(2; \frac{11}{3}\right)$.

? EXERCICE 7 :

Démontrer que A(-2;3) ; B(2;1) et C(4;0) sont alignés.

Solution :

On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) &= 4 \times (-3) - (-2) \times 6 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

Puisque $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$ alors les points A, B et C sont alignés.

? EXERCICE 8 :

Soient $A(-4; -3)$; $B(8; 1)$; $C(4; 4)$ et $D(-2; 2)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Solution :

On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} . On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 - (-4) \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) &= 12 \times (-2) - 4 \times (-6) \\ &= -24 + 24 \\ &= 0\end{aligned}$$

Puisque $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$ alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.