Correction exercices cours

Exercice 1 :

1) Soit VIL un triangle rectangle en I tel que VI = 6 cm et VL = 14 cm. Calculer la mesure de IL au millimètre près.

   Solution : Puisque le triangle VIL est rectangle en I, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   Donc

$$\begin{aligned} VI^2 + IL^2 &= VL^2 \\ IL^2 &= VL^2 - VI^2 \\ &= 14^2 - 6^2 \\ &= 160 \\ IL &= \sqrt{160} \\ &\approx 12{,}6\,\text{cm} \end{aligned}$$

2) Soit BIG un triangle rectangle en I tel que BI = 7 cm et IG = 9 cm. Calculer la mesure de BG au millimètre près.

   Solution : Puisque le triangle BIG est rectangle en I, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   Donc

$$\begin{aligned} BG^2 &= BI^2 + IG^2 \\ &= 7^2 + 9^2 \\ &= 130 \\ BG &= \sqrt{130} \\ &\approx 11{,}4\,\text{cm} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Pour chacun des triangles ci-dessous, dire s'il s'agit d'un triangle rectangle ou non, en justifiant.

1) Le triangle BAG tel que BA = 16 cm, AG = 24 cm et BG = 28,9 cm.

   Solution : Dans le triangle BAG, on a

$$\begin{aligned} BG^2 &= 28{,}9^2 \\ &= 835{,}21 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BA^2 + AG^2 &= 16^2 + 24^2 \\ &= 832 \end{aligned}$$

   Puisque 835,21 ≠ 832, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle BAG n'est pas rectangle.

2) Le triangle RIZ tel que RI = 12 cm, IZ = 20,9 cm et RZ = 24,1 cm.

   Solution :

Dans le triangle RIZ, on a

$$RZ^2 = 24{,}1^2 = 580{,}81 \qquad RI^2 + IZ^2 = 12^2 + 20{,}9^2 = 580{,}81$$

Puisque $RZ^2 = RI^2 + IZ^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RIZ est rectangle en I.

Exercice 3 :

Soit IJK un triangle tel que IJ = 6 cm ; JK = 3 cm et IK = 7 cm. Soit L un point de [IJ) tel que IL = 8 cm. Soit M l'intersection de (IK) et de la parallèle à (JK) passant par L. Calculer LM et IM.

Solution :

Puisque les points I, J, L ainsi que les points I, K, M sont alignés et que les droites (JK) et (LM) sont parallèles alors d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{IM}{IK} = \frac{IL}{IJ} = \frac{LM}{JK}$$

Donc $\frac{LM}{3} = \frac{8}{6}$. D'où $LM = \frac{8 \times 3}{6} = \boxed{4\,\text{cm}}$.

Donc $\frac{IM}{7} = \frac{8}{6}$. D'où $IM = \frac{8 \times 7}{6} = \frac{28}{3}$.

Exercice 4 :

1) Soit ABC un triangle tel que AB = 8 cm ; AC = 7 cm et BC = 10 cm. On place M sur [AB] et N sur [AC] tels que AM = 3,6 cm et AN = 3,2 cm. Est-ce que les droites (BC) et (MN) sont parallèles ?

   Solution : Calculons $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

   $$\frac{AM}{AB} = \frac{3{,}6}{8} = 0{,}45 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{3{,}2}{7} \approx 0{,}46$$

   Puisque $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, et que M, A et B, ainsi que N, A et C sont alignés, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

2) On place I sur [BA) et J sur [CA) tels que AI = 10,4 cm et AJ = 9,1 cm. Est-ce que (BC) et (IJ) sont parallèles ?

   Solution : Calculons $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AJ}{AC}$.

   $$\frac{AI}{AB} = \frac{10{,}4}{8} = 1{,}3 \qquad \frac{AJ}{AC} = \frac{9{,}1}{7} = 1{,}3$$

   Donc $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$.
   Les points B, A, I et C, A, J sont alignés dans le même ordre.
   D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 5 :

On considère un triangle ABC rectangle en A.

Solution : Dans le triangle ABC, rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

De plus :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \qquad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

1) Si $AB = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 26°$, combien mesurent [AC] et [BC]?

Solution :

$$BC = \frac{AB}{\cos\widehat{ABC}} = \frac{7}{\cos 26°} \approx 7{,}8\,\text{cm} \qquad AC = AB \times \tan\widehat{ABC} = 7\tan 26° \approx 3{,}4\,\text{cm}$$

2) Si $BC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 42°$, combien mesurent [AC] et [AB]?

Solution :

$$AB = BC \times \cos\widehat{ABC} = 9\cos 42° \approx 6{,}7\,\text{cm} \qquad AC = BC \times \sin\widehat{ABC} = 9\sin 42° \approx 6{,}0\,\text{cm}$$

3) Si $BC = 5\,\text{cm}$ et $AB = 3\,\text{cm}$, combien mesure $\widehat{ABC}$?

Solution :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{3}{5} \text{ donc } \widehat{ABC} \approx 53{,}1° \qquad AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{cm}$$

4) Si $AB = 11\,\text{cm}$ et $AC = 9\,\text{cm}$, combien mesure $\widehat{ABC}$?

Solution :

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{9}{11} \text{ donc } \widehat{ABC} \approx 39{,}3° \qquad BC = \sqrt{9^2 + 11^2} \approx 14{,}2\,\text{cm}$$

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points tels que $AB = 3{,}3$; $BC = 6{,}5$ et $AC = 5{,}6$.

Démontrer que A est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Solution :

Dans le triangle ABC, on a

$$\begin{aligned} BC^2 &= 6{,}5^2 \\ &= 42{,}25 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 3{,}3^2 + 5{,}6^2 \\ &= 42{,}25 \end{aligned}$$

Puisque $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

On en déduit alors que les droites (AC) et (AB) sont perpendiculaires en A donc le point A est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Exercice 7 :

Soient (d) une droite et M un point qui n'est pas sur (d). Soit H le projeté orthogonal de M sur (d).
Soit $B \in d$ tel que $BH = 4$ et $\widehat{HBM} = 50°$.
Déterminer la distance de M à (d).

Solution :

Puisque le point H est le projeté orthogonal de M sur (s) alors le triangle BHM est rectangle en H.

$$\tan \widehat{HBM} = \frac{MH}{HB} \quad \Leftrightarrow \quad MH = 4 \times \tan 50° = 4{,}8$$

Exercice 8 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer l'aire de ABC.

Solution :

Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC), ainsi le triangle ABH est rectangle en H.

$$\sin \widehat{HAB} = \frac{BH}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad BH = 5 \times \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit l'aire du triangle ABC :

$$A = \frac{BH \times AC}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}7$$