Exercices inéquations

Exercice 1 :

1) 5 est-il solution de l'inéquation $-3x^2 - 3x - 10 \geqslant -101$?
2) -5 est-il solution de l'inéquation $-3x^2 + 9x - 4 \leqslant -x - 10$?
3) 4 est-il solution de l'inéquation $2x^2 + 4x - 6 < 43$?

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $x - 7 \geqslant 5$
2) $-13x + 10 < 3$
3) $-8(-2x - 1) > x + 4$
4) $3x - 12 < 12x - 7$
5) $2 - 3(x - 5) \leqslant 12$
6) $-6(10x + 5) \geq -11x + 3$
7) $7x + 12 > -13x + 10$
8) $4x + 4 > 0$
9) $3x - 2 \geqslant 0$
10) $x + 11 \geqslant -1$

Exercice 3 :

1) Si $x \geqslant 3$, que peut-on dire de $-8x + 6$?
2) Sachant que $-5 \leqslant x < -1$, encadrer le plus précisément possible $6x - 10$.
3) Sachant que $4{,}24 < \sqrt{18} \leqslant 4{,}25$, encadrer le plus précisément possible $-2\sqrt{18} - 1$.

Exercice 4 : Pour la location mensuelle d'un véhicule, une entreprise propose le tarif suivant :
Forfait de 104 € quel que soit le nombre de km parcourus, puis un supplément par kilomètre parcouru de 0,22 €.

Hélène loue une voiture à cette société. Elle a un budget de 270 € et ne veut pas le dépasser. Quel nombre maximum de km (arrondi à l'unité) pourra-t-elle parcourir sans dépasser son budget ?

Exercice 5 : On donne les deux programmes de calcul suivants :

Programme 1 :
- Choisir un nombre
- Ajouter -6
- Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ

Programme 2 :
- Choisir un nombre
- Ajouter -2
- Prendre le carré du résultat

Déterminer les nombres que l'on doit entrer dans ces deux programmes pour qu'au final le résultat obtenu avec le programme 1 soit strictement inférieur à celui obtenu avec le programme 2.

Correction

Exercice 6 :

1. Pour $x = 5$, on obtient :
$$\begin{aligned} -3x^2 - 3x - 10 &= -3 \times 5^2 - 3 \times 5 - 10 \\ &= -100 \end{aligned}$$
Or $-100 \geqslant -101$.
On en déduit que 5 est solution de l'inéquation.
2. • Pour $x = -5$, on obtient :
$$\begin{aligned} -3x^2 + 9x - 4 &= -3 \times (-5)^2 + 9 \times (-5) - 4 \\ &= -124 \end{aligned}$$
• Pour $x = -5$, on obtient :
$$\begin{aligned} -x - 10 &= -1 \times -5 - 10 \\ &= -5 \end{aligned}$$
Comme $-124 \leqslant -5$, le nombre -5 est solution de l'inéquation.
3. Pour $x = 4$, on obtient :
$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 6 &= 2 \times 4^2 + 4 \times 4 - 6 \\ &= 42 \end{aligned}$$
Or $42 < 43$
On en déduit que 4 est solution de l'inéquation.

Exercice 7 :

1. $x - 7 \geqslant 5$
On ajoute 7 aux deux membres.
$x - 7\mathbf{+7} \geqslant 5\mathbf{+7}$
$x \geqslant 12$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = [12\,; +\infty[$.
2. $-13x + 10 < 3$
On soustrait 10 aux deux membres.
$-13x + 10\mathbf{-10} < 3\mathbf{-10}$
$-13x < -7$
On divise les deux membres par -13.
Comme -13 est négatif, l'inégalité change de sens.
$-13x\mathbf{\div(-13)} > -7\mathbf{\div(-13)}$
$x > \dfrac{-7}{-13}$
$x > \dfrac{7}{13}$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left]\dfrac{7}{13}\,; +\infty\right[$.
3. $-8(-2x - 1) > x + 4$
On commence par développer le membre de gauche.
$-8 \times (-2)x - 8 \times (-1) > x + 4$
$16x + 8 > x + 4$
On soustrait x aux deux membres.
$16x + 8\mathbf{-x} > x + 4\mathbf{-x}$
$15x + 8 > 4$
On soustrait 8 aux deux membres.
$15x + 8\mathbf{-8} > 4\mathbf{-8}$

$15x > -4$
On divise les deux membres par 15.
$15x \div 15 > -4 \div 15$
$x > \dfrac{-4}{15}$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left]-\dfrac{4}{15}\,;+\infty\right[$.

4. $3x - 12 < 12x - 7$
   On soustrait $12x$ aux deux membres.
   $3x - 12 - 12x < 12x - 7 - 12x$
   $-9x - 12 < -7$
   On ajoute 12 aux deux membres.
   $-9x - 12 + 12 < -7 + 12$
   $-9x < 5$
   On divise les deux membres par -9.
   Comme -9 est négatif, l'inégalité change de sens.
   $-9x \div (-9) > 5 \div (-9)$
   $x > \dfrac{5}{-9}$
   $x > -\dfrac{5}{9}$
   L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left]-\dfrac{5}{9}\,;+\infty\right[$.
5. $2 - 3(x - 5) \leqslant 12$
   On commence par développer le membre de gauche.
   $2 - 3x + 15 \leqslant 12$
   $-3x + 17 \leqslant 12$
   On soustrait 17 aux deux membres.
   $-3x \leqslant -5$
   On divise les deux membres par -3.
   Comme -3 est négatif, l'inégalité change de sens.
   $x \geq \dfrac{5}{3}$
   L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left[\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right[$.
6. $-6(10x + 5) \geq -11x + 3$
   On commence par développer le membre de gauche.
   $-6 \times 10x - 6 \times 5 \geq -11x + 3$
   $-60x - 30 \geq -11x + 3$
   On ajoute $11x$ aux deux membres.
   $-60x - 30 + 11x \geq -11x + 3 + 11x$
   $-49x - 30 \geqslant 3$
   On ajoute 30 aux deux membres.
   $-49x - 30 + 30 \geqslant 3 + 30$
   $-49x \geqslant 33$
   On divise les deux membres par -49.
   Comme -49 est négatif, l'inégalité change de sens.
   $-49x \div (-49) \leqslant 33 \div (-49)$
   $x \leqslant \dfrac{33}{-49}$
   L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left]-\infty\,;-\dfrac{33}{49}\right]$.
7. $7x + 12 > -13x + 10$

On ajoute $13x$ aux deux membres.
$7x+12\mathbf{+13x}>-13x+10\mathbf{+13x}$
$20x+12>10$
On soustrait 12 aux deux membres.
$20x+12\mathbf{-12}>10\mathbf{-12}$
$20x>-2$
On divise les deux membres par 20.
$20x\div\mathbf{20}>-2\div\mathbf{20}$
$x>\dfrac{-2}{20}$
$x>-\dfrac{1}{10}$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]-\dfrac{1}{10}\,;+\infty\right[$.

8. $4x+4>0$
On soustrait 4 aux deux membres.
$4x+4\mathbf{-4}>0\mathbf{-4}$
$4x>-4$
On divise les deux membres par 4.
$4x\div\mathbf{4}>-4\div\mathbf{4}$
$x>\dfrac{-4}{4}$
$x>-1$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=]-1\,;+\infty[$.

9. $3x-2\geqslant 0$
On ajoute 2 aux deux membres.
$3x-2\mathbf{+2}\geqslant 0\mathbf{+2}$
$3x\geqslant 2$
On divise les deux membres par 3.
$3x\div\mathbf{3}\geqslant 2\div\mathbf{3}$
$x\geqslant\dfrac{2}{3}$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

10. $x+11\geqslant -1$
On soustrait 11 aux deux membres.
$x+11\mathbf{-11}\geqslant -1\mathbf{-11}$
$x\geqslant -12$
L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=[-12\,;+\infty[$.

Exercice 8 :

1. **Méthode :** en partant de l'inégalité vérifiée par x, on forme, avec des opérations successives, $-8x+6$.

$$\begin{aligned} x &\geqslant 3 \\ -8\times x &\leqslant -8\times 3 \quad \text{On multiplie par } -8<0\text{, le sens des inégalités change.} \\ -8x &\leqslant -24 \\ -8x+6 &\leqslant -24+6 \quad \text{On ajoute 6.} \\ -8x+6 &\leqslant -18 \end{aligned}$$

2. **Méthode :** en partant de l'encadrement initial de x, on forme, avec des opérations successives, $6x-10$.

$$\begin{aligned}
-5 &\leqslant x < -1 \\
6\times(-5) \leqslant 6\times x &< 6\times(-1) \quad \text{On multiplie par } 6>0 \text{ , le sens des inégalités ne change pas.} \\
-30 &\leqslant 6x < -6 \\
-30-10 \leqslant 6x-10 &< -6-10 \quad \text{On retranche 10.} \\
-40 &\leqslant 6x-10 < -16
\end{aligned}$$

3. **Méthode :** en partant de l'encadrement initial de $\sqrt{18}$, on forme, avec des opérations successives, $-2\sqrt{18}-1$.

$$\begin{aligned}
4{,}24 &< \sqrt{18} \leqslant 4{,}25 \\
-2\times 4{,}24 > -2\times\sqrt{18} &\geqslant -2\times 4{,}25 \quad \text{On multiplie par } -2<0\text{, le sens des inégalités change.} \\
-8{,}48 > -2\sqrt{18} &\geqslant -8{,}5 \\
-8{,}48-1 > -2\sqrt{18}-1 &\geqslant -8{,}5-1 \quad \text{On retranche 1.} \\
-9{,}48 > -2\sqrt{18}-1 &\geqslant -9{,}5
\end{aligned}$$

Ainsi, $-9{,}5 \leqslant -2\sqrt{18}-1 < -9{,}48$.

EXERCICE 9 :

En notant x, le nombre de km parcourus, le coût pour la location mensuelle est donné par : $0{,}22x+104$.

Le budget de Hélène étant de 270 €, le nombre de km x qu'elle pourra parcourir doit vérifier $0{,}22x+104 < 270$.

$$\begin{aligned}
0{,}22x+104 &\leqslant 270 \\
0{,}22x+104-\mathbf{104} &\leqslant 270x-\mathbf{104} \\
0{,}22x &\leqslant 166 \\
x &\leqslant \frac{166}{0{,}22}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{166}{0{,}22} \simeq 754{,}55$, Hélène pourra faire au maximum 754 km pendant le mois avec son budget de 270 €.

EXERCICE 10 :

En notant x le nombre choisi au départ :

On obtient avec le **programme 1 :**

- Ajouter -6 : $x+(-6)$;
- Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ: $x\times(x-6)=x^2-6x$.

On obtient avec le **programme 2 :**

- Ajouter -2 : $x+(-2)$;
- Prendre le carré du résultat : $(x-2)^2=x^2-4x+4$.

Les nombres x que l'on doit entrer dans les deux programmes pour qu'au final le résultat obtenu avec le programme 1 soit strictement inférieur à celui obtenu avec le programme 2 vérifient :

$$\begin{aligned}
x^2-6x &< x^2-4x+4 \\
-6x &< -4x+4 \\
-6x-(-4x) &< 4 \\
-2x &< 4 \\
x &> \frac{4}{-2}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{4}{-2}=-2$, on doit choisir $x>-2$ pour que le résultat obtenu avec le programme 1 soit strictement inférieur à celui obtenu avec le programme 2.