Exercices vecteurs et coordonnées

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère $A(1;-1)$; $B(-4;1)$ et $C(-6;-4)$.

1) Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Solution : On calcule les longueurs :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-4-1)^2+(1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2+2^2} \\ &= \sqrt{25+4} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-6-1)^2+(-4-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-7)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{49+9} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-6-(-4))^2+(-4-1)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} \\ &= \sqrt{4+25} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

Puisque $AB = BC$, le triangle ABC est isocèle en B.
De plus on a $AB^2+BC^2 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

2) On considère le point D de coordonnées $\left(7;\frac{3}{2}\right)$. Les points A, C et D sont-ils alignés ?

Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$. On a :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6-1 \\ -4-(-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D-x_C \\ y_D-y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 7-(-6) \\ \frac{3}{2}-(-4) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 13 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BD}) &= -7\times\frac{11}{2}-(-3)\times 13 \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Puisque le déterminant est différent de zéro alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, C et D ne sont pas alignés.

3) Calculer la valeur de y pour que $E(13;y)$ soit tel que (AC) et (BE) soient parallèles.

Solution : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}$. On a :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6-1 \\ -4-(-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E-x_B \\ y_E-y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 13-(-4) \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 17 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Puisque les droites (AC) et (BE) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BE})=0 &\Leftrightarrow -7\times(y-1)+3\times 17=0\\ &\Leftrightarrow -7y+7+51=0\\ &\Leftrightarrow -7y=-58\\ &\Leftrightarrow y=\frac{58}{7}\end{aligned}$$

Pour que les droites (AC) et (BE) soient parallèles, le point E a pour coordonnées $\left(13;\dfrac{58}{7}\right)$

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(-1;1)$, $B(1;-1)$ et $C\left(3;\dfrac{7}{4}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Solution : On note $(x;y)$ les coordonnées de E. On calcule les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x-(-1)\\ y-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x+1\\ y-1\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\ -1-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\ \frac{7}{4}-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases}x+1=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 4\\ y-1=\frac{1}{2}\times(-2)+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1+2\\ y-1=-1+\frac{3}{8}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\frac{3}{8}\end{cases}$$

Les coordonnées de E sont donc $\left(2;\dfrac{3}{8}\right)$.

2) Démontrer que E est le milieu de [BC].

Solution : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EC}$.

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-1\\ \frac{3}{8}-(-1)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\ \frac{11}{8}\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}3-2\\ \frac{7}{4}-\frac{3}{8}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\ \frac{11}{8}\end{pmatrix}$$

Puisque $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$, le point E est le milieu de [BC].

3) La droite (OE) est-elle parallèle à la droite (AC)?

Solution : On a $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}2\\ \frac{3}{8}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{OE}$.

Les deux vecteurs sont colinéaires, donc (AC) et (OE) sont parallèles.

4) Soit D un point tel que (AD) et (BC) sont parallèles. Sachant qu'il est sur l'axe des ordonnées, déterminer ses coordonnées.

Solution : Puisque le point D est sur l'axe des ordonnées, son abscice est 0. Ses coordonnées sont donc $(0;y)$, avec y un nombre réel.

Les droites (AD) et (BC) étant parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}$.
Les vecteurs étant colinéaires, leur déterminant est nul :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BD})=0 &\Leftrightarrow 1\times\frac{11}{4}-(y-1)\times 2=0\\ &\Leftrightarrow \frac{11}{4}-2y+2=0\\ &\Leftrightarrow -2y=-\frac{19}{4}\\ &\Leftrightarrow y=\frac{19}{8}\end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont donc $\left(0;\frac{19}{8}\right)$.

5) Démontrer que AECD est un parallélogramme.
Solution : D'après la question précédente, on a :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\\frac{19}{8}-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\\frac{11}{8}\end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$.
Le quadrilatère AECD est un parallélogramme.